



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2025

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans cet énoncé, r est un entier naturel, $r \geq 2$, et $\llbracket 1, r \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq r$.

On s'intéresse aux chaînes de Markov homogènes à espace d'états fini $\llbracket 1, r \rrbracket$ réversibles. Ce type de chaîne intervient dans les marches aléatoires sur les sommets d'un graphe non orienté, les processus de naissance et mort et la méthode de Metropolis.

Le problème comporte trois parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes. Seules les questions 1 et 2 de la partie 1 sont utiles pour la partie 2. Un aide-mémoire Python se trouve à la fin de l'énoncé. Pour les scripts et fonctions Python, on suppose exécutées les instructions suivantes :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les propriétés suivantes :

(H1) Pour tout $n \geq 0$, $X_n(\Omega) = \llbracket 1, r \rrbracket$.

(H2) Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(X_n = i) \neq 0$. On note S_i l'ensemble des entiers $n \geq 0$ tels que $P(X_n = i) \neq 0$.

(H3) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, la fonction $n \mapsto P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j)$ est constante sur son ensemble de définition S_i ; on note $p_{i,j}$ cette constante.

La matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq r}$ s'appelle la matrice de transition de la chaîne. On rappelle que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^r p_{i,j} = 1.$$

On note ST_r l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq r}$ à coefficients positifs ou nuls

telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^r m_{i,j} = 1.$$

Donc $P \in ST_r$.

Partie 1 - Matrice stochastique réversible, exemples et caractérisation de Kolmogorov

On considère une matrice ligne $\mu = (\mu_1 \cdots \mu_r) \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont strictement positifs et tels que

$$\sum_{k=1}^r \mu_k = 1.$$

On dit que $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ est μ -réversible si $M \in ST_r$ et si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \quad \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}.$$

Dans cette partie, $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ appartient à ST_r .

1. a) Montrer que si M est μ -réversible et si $m_{i,j} \neq 0$ pour un couple $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, alors $m_{j,i} \neq 0$.
1. b) On suppose dans cette question que M est symétrique. Déterminer μ telle que M soit μ -réversible.
1. c) On note Δ la matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux sont $\mu_1, \dots, \mu_r$. Montrer que M est μ -réversible si et seulement si $\Delta M = {}^t M \Delta$.
2. Montrer que si M est μ -réversible, alors $\mu M = \mu$.

3. Un premier exemple. On suppose que $r = 3$ et que

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

3. a) Représenter le graphe probabiliste associé à cette matrice de transition.
3. b) Déterminer μ telle que P soit μ -réversible.
4. Un deuxième exemple. Soit G un graphe à r sommets $1, \dots, r$, non orienté, connexe, simple (deux sommets ne peuvent être reliés que par une seule arête). On considère l'expérience aléatoire qui consiste à se déplacer d'un sommet à l'autre de la manière suivante : on choisit un sommet au hasard, ce qui définit X_0 ; si l'on se trouve au sommet k après n déplacements, donc $X_n = k$, on se déplace vers un sommet adjacent au sommet k , ce qui définit X_{n+1} . Tous les sommets en question peuvent être choisis de manière équiprobable.

On admet que l'on définit ainsi une chaîne de Markov et on note encore $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ sa matrice de transition.

4. a) Écrire une fonction Python `Trajectoire(L,n)` qui, étant donné la liste des listes d'adjacence L du graphe G et un entier n , simule n déplacements sur le graphe et renvoie la liste des sommets visités. Les sommets reliés au sommet i par une arête se trouvent dans la liste $L[i-1]$.

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ la matrice d'adjacence de G et d_i le degré du sommet i .

4. b) Montrer que, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, $p_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{d_i}$.

4. c) En déduire μ pour laquelle P est μ -réversible.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $m_{i,j}^{(n)}$ les coefficients de la matrice M^n .

S'il existe $\sigma \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, $m_{i,j}^{(\sigma)} > 0$, on dit que M est une matrice ergodique.

On définit aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i_0, \dots, i_n) \in \llbracket 1, r \rrbracket^{n+1}$,

$$\theta_M(i_0, \dots, i_n) = m_{i_0, i_1} \cdots m_{i_{n-1}, i_n} = \prod_{k=1}^n m_{i_{k-1}, i_k}.$$

En particulier, $\theta_M(i, j) = m_{i,j}$.

5. Montrer que, pour tous $(n, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $i_0, \dots, i_n$ et $j_0, \dots, j_s$ éléments de $\llbracket 1, r \rrbracket$ tels que $i_n = j_0$,

$$\theta_M(i_0, \dots, i_n) \theta_M(j_0, \dots, j_s) = \theta_M(i_0, \dots, i_n, j_1, \dots, j_s).$$

On dit que M vérifie la propriété (K) si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $i_0, \dots, i_n \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$\theta_M(i_0, i_1, \dots, i_n, i_0) = \theta_M(i_0, i_n, \dots, i_1, i_0) \quad (K).$$

On admet qu'il suffit de vérifier (K) lorsque les i_k sont deux à deux distincts et $n \geq 2$.

On établit dans la fin de cette partie que, si M est ergodique, il existe μ telle que M soit μ -réversible si et seulement si M vérifie (K) .

6. Si $r = 3$, montrer que M vérifie (K) si et seulement si $m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} = m_{1,3}m_{3,2}m_{2,1}$.
Montrer que la matrice P de la question 3 vérifie (K) .

7. On suppose dans cette question que M est μ -réversible.

7. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $i_0, \dots, i_n \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$\left(\prod_{k=1}^n \mu_{i_{k-1}} \right) \theta_M(i_0, \dots, i_n) = \left(\prod_{k=1}^n \mu_{i_k} \right) \theta_M(i_n, \dots, i_0).$$

7. b) En déduire que M vérifie (K) .
8. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$. Montrer par récurrence sur $s \in \mathbb{N}^*$ que $m_{i,j}^{(s)} > 0$ si et seulement s'il existe $(i_0, \dots, i_s) \in \llbracket 1, r \rrbracket^{s+1}$ tel que $i_0 = i, i_s = j$ et $\theta_M(i_0, \dots, i_s) > 0$.
9. On suppose que M vérifie (K) et est ergodique avec $m_{i,j}^{(\sigma)} > 0$ pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, où σ est un entier naturel non nul. On veut montrer que M est μ -réversible pour μ à définir.
9. a) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $(i_0, i_1, \dots, i_\sigma) \in \llbracket 1, r \rrbracket^{\sigma+1}$ tel que $i_0 = i, i_\sigma = 1$ et $\theta_M(i_0, \dots, i_\sigma) > 0$. Montrer que si $m_{1,i} > 0$, alors $\theta_M(i_\sigma, \dots, i_0) > 0$ et $m_{i,1} > 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on choisit un tel chemin et on pose

$$\nu_i = \frac{\theta_M(i_\sigma, \dots, i_0)}{\theta_M(i_0, \dots, i_\sigma)}.$$

9. b) Établir que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, $\nu_i m_{i,j} = \nu_j m_{j,i}$ puis, en interprétant matriciellement les égalités précédentes, que $\nu_i m_{i,j}^{(\sigma)} = \nu_j m_{j,i}^{(\sigma)}$.
9. c) Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $m_{1,i} > 0$. En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\nu_j > 0$.
9. d) Définir alors μ telle que M soit μ -réversible.

Partie 2 - Matrice de transition réversible ergodique, convergence

On conserve les notations de la partie 1. Seules les questions 1 et 2 de la partie 1 sont utiles dans cette partie. On considère la matrice de transition P de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose qu'elle est μ -réversible. On note $Q = {}^t P$ et $q_{i,j}$ ses coefficients.

10. On rappelle que Δ désigne la matrice diagonale appartenant à $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont $\mu_1, \dots, \mu_r$.

10. a) Déterminer une matrice diagonale D inversible telle que $D^2 = \Delta$.

10. b) En utilisant la question 1.c), en déduire que $D^{-1}QD$ est diagonalisable.

10. c) En conclure que Q est diagonalisable.

On admet que, si $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et si $Z \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$, alors ${}^t(ZM) = {}^tM {}^tZ$.

11. Montrer que $Q {}^t\mu = {}^t\mu$. Que peut-on en déduire pour $\text{Sp}(Q)$?

12. Soit λ une valeur propre de Q et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

12. a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r q_{i,j} |y_j| \right) = \sum_{j=1}^r |y_j|.$$

12. b) En déduire que

$$|\lambda| \left(\sum_{j=1}^r |y_j| \right) \leq \sum_{j=1}^r |y_j|.$$

12. c) En conclure que $\text{Sp}(Q) \subset [-1, 1]$.

13. On suppose dans cette question que tous les coefficients de P , donc de Q , sont strictement positifs. On détermine $E_1(Q)$, où $E_1(Q)$ désigne le sous-espace propre de Q associé à la valeur propre 1.

13. a) Soit un vecteur propre $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ de Q pour la valeur propre 1, dont l'un au moins des coefficients, noté y_k , est strictement positif. On suppose qu'il existe ℓ tel que $y_\ell < 0$. Montrer que

$$y_k < \sum_{j=1}^r q_{k,j} |y_j|,$$

puis que

$$\sum_{i=1}^r |y_i| < \sum_{j=1}^r |y_j|.$$

Conclusion ?

13. b) En déduire que tous les vecteurs propres de Q pour la valeur propre 1 ont des composantes qui sont toutes soit positives, soit négatives. Que peut-on dire d'un élément de $E_1(Q)$ dont la somme des composantes est nulle ?

13. c) Soit Y un vecteur propre de Q pour la valeur propre 1. Montrer que

$$Y = \left(\sum_{i=1}^r y_i \right)^t \mu.$$

En conclure que $E_1(Q) = \text{Vect}({}^t \mu)$.

13. d) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ tel que $QY = -Y$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^r y_i = 0.$$

En raisonnant par l'absurde, montrer que -1 n'est pas une valeur propre de Q .

Dans la suite de cette partie, on suppose P ergodique avec, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, $p_{i,j}^{(u)} > 0$, où u est un entier naturel non nul. En appliquant la question précédente à la matrice de transition P^u , qui est aussi μ -réversible, on a :

$$\text{Sp}(Q^u) \subset]-1, 1] \quad \text{et} \quad E_1(Q^u) = \text{Vect}({}^t\mu).$$

14. a) Montrer que $E_1(Q) = \text{Vect}({}^t\mu)$.

14. b) En distinguant les cas u pair et u impair, montrer par l'absurde que -1 n'est pas une valeur propre de Q .

15. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les coefficients d'une matrice diagonale semblable à Q , avec $\lambda_1 = 1$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, r\}$, $-1 < \lambda_i < 1$, et $({}^t\mu, Y_2, \dots, Y_r)$ une base associée de vecteurs propres.

On note aussi, pour $n \in \mathbb{N}$, $L_n = (P(X_n = 1) \dots P(X_n = r)) \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$.

15. a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = L_n P$, puis que $L_n = L_0 P^n$.

15. b) Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n = \alpha_1 \mu + \sum_{k=2}^r \alpha_k \lambda_k^n {}^t Y_k.$$

15. c) En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = j) = \alpha_1 \mu_j$.
15. d) Montrer que $\alpha_1 = 1$. En conclure que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X à valeurs dans $\llbracket 1, r \rrbracket$ telle que, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $P(X = j) = \mu_j$.

Partie 3 - Un algorithme pour la réversibilité

On conserve les notations de la partie 1. Cette partie est indépendante de la précédente.

Soit $\alpha \in]0, 1]$. On définit deux opérations élémentaires sur les matrices

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in ST_r :$$

On modifie la ligne k de M , où $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, en remplaçant, pour tout $j \neq k$, $m_{k,j}$ par $m'_{k,j} = \alpha m_{k,j}$ et $m_{k,k}$ par $m'_{k,k} = 1 - \alpha + \alpha m_{k,k}$.

On modifie la colonne k de M , où $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, et sa diagonale en remplaçant, pour tout $i \neq k$, $m_{i,k}$ par $m'_{i,k} = \alpha m_{i,k}$ et $m_{i,i}$ par $m'_{i,i} = m_{i,i} + (1 - \alpha)m_{i,k}$.

Par exemple, si

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

la première opération donne

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

et la deuxième donne

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, on obtient à partir de $M \in ST_r$ une matrice appartenant à ST_r , notée dans la suite $M' = (m'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$. On ne modifie ainsi, pour les éléments non diagonaux, que ceux de la ligne k pour la première opération et ceux de la colonne k pour la deuxième.

- 16.** Écrire une fonction Python `opLigne(M,k,alpha)` qui réalise l'opération élémentaire sur la k -ième ligne de M , représentée par la matrice NumPy `M`, α étant représenté par `alph`. La matrice `M` est modifiée sur place.

On définit de même une fonction `opCol(M,k,alpha)` réalisant l'opération sur la k -ième colonne et la diagonale de M ; cette fonction n'est pas demandée.

- 17.** Soit $M \in ST_r$ et M' obtenue par l'une des deux opérations précédentes.

- 17. a)** Montrer que M vérifie (K) si et seulement si M' aussi.

- 17. b)** Montrer que, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, si $m_{i,j} > 0$, alors $m'_{i,j} > 0$.

- 17. c)** Établir que si M est ergodique, M' l'est aussi.

Soit I un sous-ensemble non vide de $\llbracket 1, r \rrbracket$ et $M \in ST_r$. On définit le graphe non orienté $G_M(I)$ dont l'ensemble des sommets est I et tel que $\{i,j\}$ est une arête si $i \neq j$, $m_{i,j} \neq 0$ et $m_{j,i} = m_{i,j}$. Si I est réduit à un seul élément, le graphe ne comporte pas d'arête.

Par exemple, pour la matrice M donnée ci-dessus, avec $I = \{1, 2, 3\}$, les arêtes sont $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$, et avec $I = \{1, 3\}$, il n'y a aucune arête.

18. On suppose I tel que $G_M(I)$ soit connexe et qu'il existe $\ell \in I$ et $k \notin I$ tels que $m_{k,\ell}$ et $m_{\ell,k}$ soient non nuls.

Si $m_{\ell,k} \leq m_{k,\ell}$, on pose $\alpha = \frac{m_{\ell,k}}{m_{k,\ell}}$ et on fait l'opération élémentaire sur la ligne k ; sinon, on pose $\alpha = \frac{m_{k,\ell}}{m_{\ell,k}}$ et on fait l'opération élémentaire sur la colonne k .

On note encore M' la matrice obtenue. Montrer que $\{k, \ell\}$ est une arête de $G_{M'}(I \cup \{k\})$ et que ce graphe est connexe.

On suppose $M \in ST_r$ ergodique dans la suite de cette partie.

19. On suppose dans cette question que M vérifie (K) .

19. a) En utilisant le résultat de la question 8, établir que si I est un sous-ensemble non vide de $\llbracket 1, r \rrbracket$, différent de $\llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $\ell \in I$ et $k \notin I$ tels que $m_{\ell,k}$ et $m_{k,\ell}$ soient non nuls.

19. b) On pose $I = \{1\}$. Le graphe $G_M(I)$ est alors connexe. En déduire un algorithme composé de $r - 1$ opérations élémentaires à partir de M et $I = \{1\}$, qui la transforme en une matrice M^* ergodique vérifiant (K) et telle que $G_{M^*}(\llbracket 1, r \rrbracket)$ soit connexe. En déduire que M^* est symétrique.

20. Réciproquement, on suppose qu'à partir de $M \in ST_r$, une suite d'opérations élémentaires la transforme en une matrice symétrique M^* . Montrer que M vérifie (K) .

21. On veut implémenter l'algorithme de la question 19.b) en Python.

21. a) Écrire une fonction `NonNul(M, I, J)` qui, étant donné une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ représentée par la matrice NumPy `M` et deux ensembles non vides d'indices I et J , représentés par les listes `I` et `J`, renvoie un couple (i, j) tel que $i \in I$, $j \in J$ et $m_{i,j} \neq 0$, c'est-à-dire `M[i-1][j-1]` non nul, s'il en existe un, et le couple $(0, 0)$ sinon.

21. b) Compléter la fonction suivante pour qu'elle réalise l'algorithme de la question 19.b) et renvoie True si M ergodique vérifie (K) et False sinon. On raisonne ici en arithmétique exacte sur les coefficients; l'effet des arrondis numériques devra être distingué du résultat mathématique. La méthode `.all()` renvoie True si toutes les valeurs du tableau booléen sont vraies et False sinon.

Python

```
def estRev(M):
    r = np.shape(M)[0]
    I = [1]
    J = [k for k in range(2, r + 1)]
    while len(I) < r:
        ell, k = NonNul(M, I, J)
        if (ell == 0) or M[k-1][ell-1] * M[ell-1][k-1] == 0:
            return ...
        else:
            if M[ell-1][k-1] <= M[k-1][ell-1]:
                opLigne(M, k, M[ell-1][k-1] / M[k-1][ell-1])
            else:
                opCol(M, k, M[k-1][ell-1] / M[ell-1][k-1])
            I.append(...)
            J.remove(...)
    return (np.transpose(M) == M).all()
```

Aide-mémoire Python

Listes : `[]` crée une liste vide; `[a]*n` ou `n*[a]` crée une liste avec n fois l'élément a ; `L.append(a)` ajoute a à la fin de L ; `L1 + L2` concatène deux listes; `len(L)` donne la longueur de L ; `L.count(a)` compte les occurrences de a ; `L.remove(a)` enlève sa première occurrence; `a in L` teste l'appartenance et renvoie True ou False.

NumPy : `np.array(L)` transforme une liste en tableau NumPy; `np.transpose(M)` renvoie la transposée de M ; `np.shape(M)` donne un couple contenant le nombre de lignes et le nombre de colonnes de M .

Simulation : `rd.randint(a,b,[r,s])` simule une matrice de taille (r,s) de variables

indépendantes uniformes sur $\llbracket a, b-1 \rrbracket$. En remplaçant $[r, s]$ par r , on obtient un vecteur de longueur r ; en omettant ce paramètre, on obtient un seul entier selon la même loi.