



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2025

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 1 - Matrice stochastique réversible, exemples et caractérisation de Kolmogorov

1. a) La réversibilité donne $\mu_j m_{j,i} = \mu_i m_{i,j}$. Comme $\mu_i > 0$, $\mu_j > 0$ et $m_{i,j} > 0$, on obtient $m_{j,i} = \mu_i m_{i,j} / \mu_j > 0$. Les deux transitions opposées sont donc simultanément nulles ou non nulles.

1. b) On peut choisir la loi uniforme, soit $\mu_i = 1/r$ pour tout i . En effet, $\mu_i m_{i,j} = m_{i,j}/r = m_{j,i}/r = \mu_j m_{j,i}$, les coefficients de μ sont strictement positifs et leur somme vaut 1.

Ce choix n'est pas nécessairement unique sous la seule hypothèse de symétrie : si $M = I_r$, toute matrice ligne strictement positive de somme 1 convient. Plus généralement, les relations imposent $\mu_i = \mu_j$ dès que $m_{i,j} > 0$; elles imposent donc la constance sur chaque composante connexe du graphe des transitions non nulles, sans imposer la même constante entre composantes distinctes.

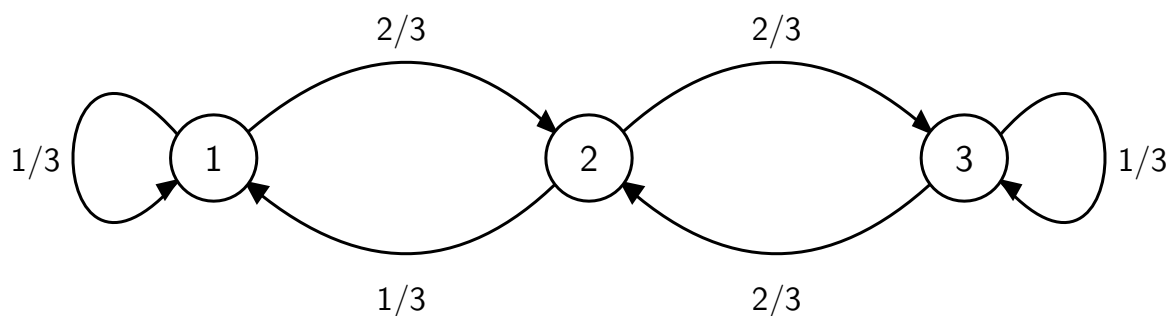
1. c) Le coefficient (i, j) de ΔM est $\mu_i m_{i,j}$; celui de ${}^t M \Delta$ est $m_{j,i} \mu_j$. L'égalité des deux matrices équivaut exactement aux relations de réversibilité, puisque $M \in ST_r$ est déjà supposé.

2. Pour chaque j ,

$$(\mu M)_j = \sum_{i=1}^r \mu_i m_{i,j} = \sum_{i=1}^r \mu_j m_{j,i} = \mu_j \sum_{i=1}^r m_{j,i} = \mu_j.$$

La dernière somme est celle de la ligne j de M , donc vaut 1. Ainsi $\mu M = \mu$: la loi μ est stable.

3. a) Les transitions non nulles sont $1 \rightarrow 1$ et $3 \rightarrow 3$ de probabilité $1/3$, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 2$ de probabilité $2/3$, et $2 \rightarrow 1$ de probabilité $1/3$. Toutes les autres transitions sont absentes. On obtient le graphe suivant.



3. b) Les paires (1, 2) et (2, 3) donnent respectivement $2\mu_1 = \mu_2$ et $2\mu_2 = 2\mu_3$. La paire (1, 3) ne donne aucune contrainte supplémentaire puisque les deux coefficients sont nuls. Avec $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, on obtient $5\mu_1 = 1$, donc

$$\mu = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Ces coefficients sont strictement positifs et satisfont toutes les relations, y compris celles des paires diagonales. C'est l'unique solution ici.

4. a) Les programmes de ce corrigé supposent les imports suivants :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Le graphe est connexe et possède au moins deux sommets ; chaque sommet a donc au moins un voisin. On choisit d'abord uniformément l'un des r sommets, puis uniformément un indice dans la liste des voisins à chaque déplacement. La liste renvoyée contient $n + 1$ sommets, en comptant le sommet initial.

Python

```
def Trajectoire(L, n):
    r = len(L)
    sommet = rd.randint(1, r + 1)
    visites = [sommet]
```

```
for t in range(n):
    voisins = L[sommet - 1]
    sommet = voisins[rd.randint(0, len(voisins))]
    visites.append(sommet)
return visites
```

La fonction convient pour tout entier $n \geq 0$; pour $n = 0$, elle renvoie uniquement le sommet initial. `randint(a, b)` exclut la borne supérieure, ce qui justifie les bornes utilisées.

4. b) Si $a_{i,j} = 0$, le sommet j n'est pas voisin de i , donc $p_{i,j} = 0$. Si $a_{i,j} = 1$, il est l'un des d_i voisins équiprobables, donc $p_{i,j} = 1/d_i$. Puisque $d_i > 0$, les deux cas se regroupent en $p_{i,j} = a_{i,j}/d_i$.

4. c) Posons

$$S = \sum_{k=1}^r d_k > 0$$

et $\mu_i = d_i/S$. Les coefficients de μ sont strictement positifs et leur somme vaut 1. Comme G est non orienté, $a_{i,j} = a_{j,i}$, donc

$$\mu_i p_{i,j} = \frac{d_i}{S} \frac{a_{i,j}}{d_i} = \frac{a_{i,j}}{S} = \frac{a_{j,i}}{S} = \mu_j p_{j,i}.$$

Ainsi P est μ -réversible. La formule des poignées de main permet aussi d'écrire $\mu_i = d_i/(2|E|)$, où $|E|$ est le nombre d'arêtes. La connexité rend cette loi unique : sur chaque arête, la réversibilité impose $\mu_i/d_i = \mu_j/d_j$, donc ce rapport est constant sur tout le graphe, et sa normalisation fixe sa valeur à $1/S$.

5. Le membre de gauche est le produit des coefficients de toutes les transitions du premier chemin, puis de toutes celles du second. Comme $i_n = j_0$, leur concaténation

ne crée ni ne supprime de transition :

$$\left(\prod_{k=1}^n m_{i_{k-1}, i_k} \right) \left(\prod_{k=1}^s m_{j_{k-1}, j_k} \right) = \theta_M(i_0, \dots, i_n, j_1, \dots, j_s).$$

L'égalité reste valable si certains facteurs sont nuls.

6. D'après la réduction admise dans le sujet, il suffit de considérer les cycles dont les sommets sont deux à deux distincts et au nombre d'au moins trois. Pour $r = 3$, ils passent nécessairement par les trois sommets. Une permutation cyclique conserve le produit et un changement d'orientation échange les deux membres : toutes les égalités se réduisent donc à

$$m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} = m_{1,3}m_{3,2}m_{2,1}.$$

Pour P , $p_{3,1} = p_{1,3} = 0$, donc les deux membres valent 0. Ainsi P vérifie (K) . On pouvait aussi le déduire de la réversibilité de la question 3.b), une fois la question 7 établie.

7. a) Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la réversibilité donne

$$\mu_{i_{k-1}} m_{i_{k-1}, i_k} = \mu_{i_k} m_{i_k, i_{k-1}}.$$

En multipliant ces n égalités, on obtient exactement l'identité demandée ; le produit des transitions inverses est $\theta_M(i_n, \dots, i_0)$, l'ordre des facteurs réels pouvant être changé.

7. b) Appliquons 7.a) à un chemin fermé $i_0, i_1, \dots, i_n, i_0$. Les deux produits de coefficients de μ contiennent les mêmes facteurs, seulement décalés. Ce produit commun est strictement positif, ce qui permet de le simplifier. Il reste (K) .

Une forme utile de 7.a), obtenue en simplifiant les facteurs intérieurs strictement positifs, est $\mu_{i_0} \theta_M(i_0, \dots, i_n) = \mu_{i_n} \theta_M(i_n, \dots, i_0)$. Elle exprime directement le renversement d'un chemin pondéré.

8. Pour $s = 1$, $m_{i,j}^{(1)} = m_{i,j} = \theta_M(i, j)$, donc l'équivalence est vraie.

Supposons-la vraie à un rang $s \geq 1$. Le produit matriciel donne

$$m_{i,j}^{(s+1)} = \sum_{k=1}^r m_{i,k}^{(s)} m_{k,j}.$$

Tous les termes sont positifs ou nuls. La somme est strictement positive si et seulement s'il existe k tel que $m_{i,k}^{(s)} > 0$ et $m_{k,j} > 0$. Par l'hypothèse de récurrence et la concaténation de la question 5, cela équivaut à l'existence d'un chemin de longueur $s + 1$ de i à j dont le produit est strictement positif. L'équivalence est donc vraie à tout rang $s \geq 1$.

9. a) Puisque $m_{i,1}^{(\sigma)} > 0$, la question 8 donne un chemin de longueur σ de i à 1 de produit strictement positif.

Notons $A_i = \theta_M(i_0, \dots, i_\sigma) > 0$ et $B_i = \theta_M(i_\sigma, \dots, i_0) \geq 0$. Si $m_{1,i} > 0$, la propriété (K) appliquée au chemin fermé $i_0, \dots, i_\sigma, i_0$ donne

$$A_i m_{1,i} = m_{i,1} B_i > 0.$$

Les deux facteurs du membre de droite sont positifs ou nuls, donc sont chacun strictement positifs : $B_i > 0$ et $m_{i,1} > 0$.

9. b) Fixons les chemins choisis de i à 1 et de j à 1, et utilisons A_i, B_i, A_j, B_j comme ci-dessus. Considérons le chemin fermé constitué successivement du chemin de i à 1, du chemin inverse de 1 à j , puis de la transition de j à i . Son produit est $A_i B_j m_{j,i}$. Celui du chemin inverse est $m_{i,j} A_j B_i$. La propriété (K) donne donc

$$A_i B_j m_{j,i} = m_{i,j} A_j B_i.$$

En divisant par $A_i A_j > 0$, il vient $\nu_j m_{j,i} = \nu_i m_{i,j}$. Aucune division par B_i ou B_j n'a été faite, car leur stricte positivité n'est pas encore établie.

Posons $N = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_r)$. Les relations précédentes s'écrivent $NM = {}^tMN$. Montrons par récurrence que $NM^s = ({}^tM)^s N$: le cas $s = 1$ vient d'être prouvé ; si l'égalité est vraie à s , alors

$$NM^{s+1} = ({}^tM)^s NM = ({}^tM)^{s+1} N.$$

Au rang σ , l'identification des coefficients donne $\nu_i m_{i,j}^{(\sigma)} = \nu_j m_{j,i}^{(\sigma)}$.

9. c) La première ligne de M est à coefficients positifs ou nuls de somme 1. Au moins l'un d'eux, disons $m_{1,i}$, est donc strictement positif. La question 9.a) donne $B_i > 0$, donc $\nu_i = B_i/A_i > 0$. Pour tout j , la question 9.b) donne

$$\nu_j = \nu_i \frac{m_{i,j}^{(\sigma)}}{m_{j,i}^{(\sigma)}} > 0,$$

puisque les deux coefficients de M^σ sont strictement positifs.

9. d) On pose

$$S = \sum_{j=1}^r \nu_j > 0$$

et $\mu_i = \nu_i/S$. Ces coefficients sont strictement positifs et leur somme vaut 1. En divisant les relations de 9.b) par S , on obtient $\mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$. Ainsi M est μ -réversible.

La construction et la question 7 établissent bien les deux implications annoncées sous l'hypothèse d'ergodicité, sans utiliser de théorème général extérieur au problème.

Partie 2 - Matrice de transition réversible ergodique, convergence

10. a) Puisque $\mu_i > 0$ pour tout i , on peut choisir

$$D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_r}).$$

Cette matrice est inversible, son inverse est $\text{diag}(1/\sqrt{\mu_1}, \dots, 1/\sqrt{\mu_r})$, et $D^2 = \Delta$.

10. b) Par 1.c), $D^2 P = Q D^2$. En multipliant à gauche et à droite par D^{-1} , on obtient $DPD^{-1} = D^{-1}QD$. Comme D et D^{-1} sont diagonales et $Q = {}^t P$,

$${}^t(D^{-1}QD) = D {}^t Q D^{-1} = DPD^{-1} = D^{-1}QD.$$

La matrice réelle $D^{-1}QD$ est donc symétrique, et ainsi diagonalisable d'après le résultat du programme admis sur les matrices symétriques réelles.

10. c) Il existe une matrice inversible R et une matrice diagonale Λ telles que $D^{-1}QD = R\Lambda R^{-1}$. Alors $Q = (DR)\Lambda(DR)^{-1}$, et DR est inversible. Ainsi Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
11. La question 2 donne $\mu P = \mu$. En transposant, $Q {}^t\mu = {}^t\mu$. Le vecteur ${}^t\mu$ est non nul puisque ses coefficients sont strictement positifs. Ainsi $1 \in \text{Sp}(Q)$, avec ${}^t\mu$ comme vecteur propre associé.

12. a) Les colonnes de Q sont les lignes de P , donc

$$\sum_{i=1}^r q_{i,j} = 1$$

pour chaque j . En échangeant deux sommes finies,

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r q_{i,j} |y_j| = \sum_{j=1}^r |y_j| \sum_{i=1}^r q_{i,j} = \sum_{j=1}^r |y_j|.$$

12. b) Pour chaque i , l'égalité $QY = \lambda Y$ et l'inégalité triangulaire donnent

$$|\lambda| |y_i| = \left| \sum_j q_{i,j} y_j \right| \leq \sum_j q_{i,j} |y_j|,$$

car les $q_{i,j}$ sont positifs ou nuls. En sommant et en appliquant 12.a), on obtient l'inégalité demandée.

12. c) Un vecteur propre est non nul, donc

$$\sum_j |y_j| > 0.$$

On peut diviser l'inégalité de 12.b) par cette somme et obtenir $|\lambda| \leq 1$. Les valeurs propres sont réelles puisque Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\text{Sp}(Q) \subset [-1, 1]$.

13. a) Comme $QY = Y$,

$$y_k = \sum_j q_{k,j} y_j.$$

Or

$$\sum_j q_{k,j} |y_j| - y_k = \sum_j q_{k,j} (|y_j| - y_j) \geq q_{k,\ell} (|y_\ell| - y_\ell) > 0.$$

La stricte positivité utilise $q_{k,\ell} > 0$ et $y_\ell < 0$. Comme $y_k > 0$, on a donc

$$|y_k| < \sum_j q_{k,j} |y_j|.$$

Pour les autres lignes, l'inégalité triangulaire donne

$$|y_i| \leq \sum_j q_{i,j} |y_j|.$$

En sommant, avec une inégalité stricte pour la ligne k , puis en utilisant 12.a), il vient

$$\sum_i |y_i| < \sum_i \sum_j q_{i,j} |y_j| = \sum_j |y_j|.$$

C'est contradictoire. Un vecteur propre pour 1 ne peut donc pas avoir à la fois une composante strictement positive et une composante strictement négative.

13. b) Tout vecteur propre a ainsi toutes ses composantes positives ou nulles, ou toutes négatives ou nulles. En fait, elles sont même toutes strictement de même signe : si

$Y \geq 0$ est non nul, chaque composante de QY est strictement positive, donc celles de $Y = QY$ le sont; on applique le même argument à $-Y$ dans l'autre cas.

Un élément de $E_1(Q)$ dont la somme des composantes est nulle est nécessairement nul, puisque des composantes de même signe ne peuvent avoir une somme nulle que si elles sont toutes nulles.

13. c) Posons

$$s = \sum_i y_i$$

et $Z = Y - s {}^t\mu$. Comme $QY = Y$ et $Q {}^t\mu = {}^t\mu$, on a $QZ = Z$, donc $Z \in E_1(Q)$. De plus, la somme de ses composantes est

$$s - s \sum_i \mu_i = 0.$$

La question 13.b) donne $Z = 0$. Ainsi $Y = s {}^t\mu$. Réciproquement, 11 montre que tout multiple de ${}^t\mu$ appartient à $E_1(Q)$. Par conséquent $E_1(Q) = \text{Vect}({}^t\mu)$.

13. d) En sommant les composantes de $QY = -Y$ et en utilisant la somme 1 de chaque colonne de Q , on obtient

$$\sum_j y_j = - \sum_i y_i,$$

d'où

$$\sum_i y_i = 0.$$

Supposons $Y \neq 0$. La somme nulle impose l'existence d'une composante strictement positive et d'une composante strictement négative. Fixons une ligne i . Les nombres $q_{i,j}y_j$

ont donc au moins un terme strictement positif et un terme strictement négatif. En séparant leur somme positive $A > 0$ et la valeur absolue de leur somme négative $B > 0$, on a $|A - B| < A + B$. Par conséquent,

$$|y_i| = |(QY)_i| < \sum_j q_{i,j} |y_j|.$$

La sommation contredit 12.a). Il n'existe donc aucun vecteur propre non nul pour -1 , qui n'est pas une valeur propre de Q .

Pour justifier aussi l'application annoncée à P^u , remarquons que P^u est stochastique par récurrence sur u : le produit de deux matrices stochastiques est positif ou nul, et la somme d'une de ses lignes est

$$\sum_k p_{i,k} \sum_j p_{k,j} = 1.$$

Par ailleurs, l'identité $\Delta P = Q\Delta$ de 1.c) entraîne par récurrence $\Delta P^u = Q^u \Delta$, ce qui établit la μ -réversibilité de P^u . Ses coefficients sont strictement positifs par l'hypothèse retenue, donc les conclusions de 13 s'y appliquent.

14. a) Si $QY = Y$, alors $Q^u Y = Y$ par récurrence ; ainsi $E_1(Q) \subset E_1(Q^u) = \text{Vect}({}^t\mu)$.
L'inclusion réciproque vient de 11. D'où $E_1(Q) = \text{Vect}({}^t\mu)$.

14. b) Supposons que $QY = -Y$ pour un vecteur non nul Y . Alors $Q^u Y = (-1)^u Y$.

Si u est impair, -1 serait une valeur propre de Q^u , en contradiction avec $\text{Sp}(Q^u) \subset]-1, 1]$.

Si u est pair, $Y \in E_1(Q^u)$, donc $Y = c {}^t\mu$ pour un réel $c \neq 0$. La question 11 donnerait alors $QY = Y$, en même temps que $QY = -Y$, donc $Y = 0$, contradiction. Dans les deux cas, $-1 \notin \text{Sp}(Q)$.

15. a) Pour chaque j , la relation d'évolution d'une chaîne de Markov donne

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^r P(X_n = i) p_{i,j}.$$

On peut la lire comme la formule des probabilités totales en ne conditionnant que sur les événements $[X_n = i]$ de probabilité non nulle ; ceux de probabilité nulle contribuent par 0. C'est exactement $L_{n+1} = L_n P$. Une récurrence donne $L_n = L_0 P^n$, y compris pour $n = 0$ avec $P^0 = I_r$.

15. b) Puisque $({}^t\mu, Y_2, \dots, Y_r)$ est une base de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que

$${}^tL_0 = \alpha_1 {}^t\mu + \sum_{k=2}^r \alpha_k Y_k.$$

En transposant 15.a), ${}^tL_n = Q^n {}^tL_0$. Comme $Q^n {}^t\mu = {}^t\mu$ et $Q^n Y_k = \lambda_k^n Y_k$, il vient

$${}^tL_n = \alpha_1 {}^t\mu + \sum_{k=2}^r \alpha_k \lambda_k^n Y_k.$$

On transpose pour obtenir la formule demandée. Au rang 0, $\lambda_k^0 = 1$, y compris lorsque $\lambda_k = 0$, puisqu'il s'agit de la puissance d'ordre zéro dans cette identité matricielle.

15. c) Pour $k \geq 2$, $|\lambda_k| < 1$, donc $\lambda_k^n \rightarrow 0$. La formule de 15.b) est une somme finie de vecteurs fixes multipliés par ces suites. Chaque composante converge, et $P(X_n = j) \rightarrow \alpha_1 \mu_j$.

15. d) Méthode 1 — Normalisation et passage à la limite

Pour tout n ,

$$\sum_{j=1}^r P(X_n = j) = 1.$$

On peut passer à la limite dans cette somme finie et utiliser 15.c) :

$$1 = \alpha_1 \sum_j \mu_j = \alpha_1.$$

Les μ_j définissent une loi de probabilité sur $\llbracket 1, r \rrbracket$. Soit X de cette loi. Pour tout réel x ,

$$P(X_n \leq x) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \leq x}} P(X_n = j) \longrightarrow \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \leq x}} \mu_j = P(X \leq x).$$

La convergence vaut notamment en chaque point de continuité de la fonction de répartition de X , donc X_n converge en loi vers X .

Méthode 2 — Somme des composantes des vecteurs propres

Pour $k \geq 2$, en sommant les composantes de $QY_k = \lambda_k Y_k$ et en utilisant la somme 1 des colonnes de Q , on obtient

$$\sum_i (Y_k)_i = \lambda_k \sum_i (Y_k)_i.$$

Puisque $\lambda_k \neq 1$, cette somme est nulle. Au rang 0 dans la décomposition de 15.b), la somme des composantes est donc

$$1 = \alpha_1 \sum_i \mu_i = \alpha_1.$$

Ensuite, 15.c) donne $P(X_n = j) \rightarrow \mu_j$ pour chaque entier j ; hors de $\llbracket 1, r \rrbracket$, ces probabilités sont nulles. La caractérisation de la convergence en loi pour des variables à valeurs entières donne la même conclusion. La première méthode utilise la normalisation après passage à la limite; la seconde identifie dès le départ le coefficient stable.

Partie 3 - Un algorithme pour la réversibilité

16. On multiplie la ligne k entière par α , puis on ajoute $1 - \alpha$ à l'élément diagonal. Le décalage d'indice est indispensable, car les états vont de 1 à r et les indices NumPy de 0 à $r - 1$.

Python

```
def opLigne(M, k, alph):
    r = np.shape(M)[0]
    for j in range(r):
        M[k - 1][j] = alph * M[k - 1][j]
    M[k - 1][k - 1] = M[k - 1][k - 1] + 1 - alph
```

Le code modifie M sur place et ne renvoie rien. Il faut que son type de coefficients accepte les divisions et les valeurs non entières; un tableau d'entiers tronquerait les résultats. Pour rendre les programmes suivants exécutables, on peut également définir la fonction non demandée :

Python

```
def opCol(M, k, alph):
    r = np.shape(M)[0]
    for i in range(r):
        if i != k - 1:
            ancien = M[i][k - 1]
            M[i][i] = M[i][i] + (1 - alph) * ancien
            M[i][k - 1] = alph * ancien
```

La variable `ancien` permet d'ajouter le complément calculé à partir du coefficient avant

sa modification.

17. a) Utilisons la réduction admise de (K) aux cycles de sommets deux à deux distincts, de longueur au moins trois. Un tel cycle n'utilise pas de coefficient diagonal.

S'il ne passe pas par k , aucun de ses coefficients ne change, quelle que soit l'opération. S'il passe par k , il possède exactement une transition sortant de k et une transition entrant en k . Une opération sur la ligne multiplie donc le produit dans chaque sens par α , puisqu'une seule transition sortante est concernée. Une opération sur la colonne multiplie aussi chaque produit par α , cette fois par sa seule transition entrante. Les éventuels changements diagonaux sont sans effet sur ces cycles.

Pour chaque cycle considéré, l'égalité avant modification équivaut donc à celle après modification, puisque $\alpha > 0$. La propriété (K) est ainsi préservée dans les deux sens.

17. b) Les coefficients non diagonaux sont soit inchangés, soit multipliés par $\alpha > 0$, donc un coefficient strictement positif le reste. Pour une opération de ligne, $m'_{k,k} = \alpha m_{k,k} + 1 - \alpha \geq \alpha m_{k,k}$; les autres diagonaux sont inchangés. Pour une opération de colonne, $m'_{i,i} = m_{i,i} + (1 - \alpha)m_{i,k} \geq m_{i,i}$ pour $i \neq k$, et $m'_{k,k} = m_{k,k}$. La propriété vaut donc aussi sur la diagonale, y compris lorsque $\alpha = 1$.

17. c) Soit $\sigma \geq 1$ tel que tous les coefficients de M^σ soient strictement positifs. Pour chaque couple (i, j) , la question 8 fournit un chemin de longueur σ de produit strictement positif pour M . Toutes ses transitions restent strictement positives pour M' par 17.b). Le même chemin a donc un produit strictement positif pour M' , et 8 donne $(M'^\sigma)_{i,j} > 0$. Ainsi M' est ergodique, avec le même exposant σ possible.

18. Les deux coefficients considérés sont strictement positifs. Dans le premier cas, $0 < \alpha = m_{\ell,k}/m_{k,\ell} \leq 1$, et l'opération de ligne donne $m'_{k,\ell} = \alpha m_{k,\ell} = m_{\ell,k} = m'_{\ell,k} > 0$. Dans le second cas, $0 < \alpha = m_{k,\ell}/m_{\ell,k} < 1$, et l'opération de colonne donne $m'_{\ell,k} = \alpha m_{\ell,k} = m_{k,\ell} = m'_{k,\ell} > 0$.

Dans les deux cas, $\{k, \ell\}$ est donc une arête du nouveau graphe. Comme $k \notin I$, aucun coefficient non diagonal d'une paire de sommets appartenant tous deux à I n'est

modifié. Toutes les anciennes arêtes de $G_M(I)$ sont conservées. Ses sommets restent reliés, et le nouveau sommet k est relié à $\ell \in I$. Ainsi $G_{M'}(I \cup \{k\})$ est connexe.

19. a) Méthode 1 — Chemin sortant et réversibilité

Choisissons $a \in I$ et $b \notin I$. L'ergodicité et 8 donnent un chemin de transitions strictement positives allant de a à b . À la première sortie de I , il comporte une transition $\ell \rightarrow k$ avec $\ell \in I$, $k \notin I$ et $m_{\ell,k} > 0$. Comme M est ergodique et vérifie (K) , la construction de 9 a établi qu'elle est μ -réversible pour une loi strictement positive. La question 1.a) donne alors $m_{k,\ell} > 0$. On a bien trouvé la paire cherchée.

Méthode 2 — Chemin sortant et renversement d'un cycle

On choisit comme précédemment une transition $\ell \rightarrow k$ strictement positive qui traverse la frontière de I , grâce à un chemin positif d'un sommet de I vers un sommet extérieur. L'ergodicité fournit un chemin positif de k à ℓ ; en le fermant par $\ell \rightarrow k$, on obtient un cycle de produit positif. La propriété (K) impose que le cycle inverse, qui contient $k \rightarrow \ell$, ait un produit positif. Ainsi $m_{k,\ell} > 0$. La première méthode utilise les poids réversibles construits en 9; la seconde applique directement la propriété des cycles.

19. b) On part de $I = \{1\}$ et de la matrice courante M . Tant que $I \neq \llbracket 1, r \rrbracket$, 19.a) fournit $\ell \in I$ et $k \notin I$ avec les deux transitions non nulles. On applique l'opération définie en 18, puis on remplace I par $I \cup \{k\}$. Les questions 17 et 18 garantissent à chaque étape les trois invariants : la matrice reste ergodique, elle vérifie (K) , et le graphe sur I reste connexe. Chaque étape ajoute exactement un sommet; après $r - 1$ opérations, on obtient une matrice M^* ayant toutes les propriétés annoncées.

Méthode 1 — Utilisation de la loi réversible

Puisque M^* est ergodique et vérifie (K) , la question 9 donne une loi strictement positive ρ telle que $\rho_i m_{i,j}^* = \rho_j m_{j,i}^*$. Sur une arête de $G_{M^*}(\llbracket 1, r \rrbracket)$, $m_{i,j}^* = m_{j,i}^* > 0$, donc $\rho_i = \rho_j$.

La connexité implique que tous les ρ_i sont égaux. Les relations de réversibilité deviennent alors $m_{i,j}^* = m_{j,i}^*$ pour tous les couples. Ainsi M^* est symétrique.

Méthode 2 — Fermeture d'un chemin par la propriété des cycles

Fixons $i \neq j$. La connexité fournit un chemin simple de i à j formé d'arêtes du graphe, donc de transitions opposées égales et strictement positives. Si ce chemin est une seule arête, l'égalité recherchée est déjà acquise. Sinon, notons $c > 0$ le produit de ses coefficients; le produit du chemin inverse vaut aussi c . En fermant le chemin par la transition $j \rightarrow i$, la propriété (K) donne $c m_{j,i}^* = m_{i,j}^* c$. En simplifiant c , on obtient $m_{i,j}^* = m_{j,i}^*$, même si ces coefficients sont nuls. Les coefficients diagonaux ne posent aucune condition supplémentaire, donc M^* est symétrique. Cette preuve exprime directement comment les égalités le long des arêtes se propagent aux autres paires; la première passe par la loi réversible.

20. Toute matrice symétrique vérifie (K) : dans chaque chemin fermé, le renversement remplace chaque coefficient par son coefficient transposé égal, et ne change donc pas le produit. Ainsi M^* vérifie (K) . Par 17.a), chaque opération préserve cette propriété dans les deux sens. En remontant la suite finie d'opérations, on conclut que M vérifie (K) . Cette implication ne nécessite pas l'ergodicité.

21. a) On parcourt toutes les paires dans l'ordre des listes et on renvoie la première transition non nulle; si aucune n'a été rencontrée, on renvoie $(0, 0)$.

Python

```
def NonNul(M, I, J):
    for i in I:
        for j in J:
            if M[i - 1][j - 1] != 0:
                return i, j
    return 0, 0
```

Le renvoi final est placé après les deux boucles pour garantir que toutes les paires ont

été examinées.

21. b) Question adaptée au programme actuel : le nom `OpLigne` imprimé dans l'appel du PDF est rectifié en `opLigne`, conformément à la définition de 16 ; Python distingue les majuscules et les minuscules. La nature exacte du test mathématique est explicitée dans le sujet.

Les blancs se complètent par `False`, `k` et `k` :

Python

```
def estRev(M):
    r = np.shape(M)[0]
    I = [1]
    J = [k for k in range(2, r + 1)]
    while len(I) < r:
        ell, k = NonNul(M, I, J)
        if (ell == 0) or M[k-1][ell-1] * M[ell-1][k-1] == 0:
            return False
        else:
            if M[ell-1][k-1] <= M[k-1][ell-1]:
                opLigne(M, k, M[ell-1][k-1] / M[k-1][ell-1])
            else:
                opCol(M, k, M[k-1][ell-1] / M[ell-1][k-1])
            I.append(k)
            J.remove(k)
    return (np.transpose(M) == M).all()
```

Sous l'hypothèse d'ergodicité, une transition sortant de I existe toujours tant que I est propre, par 8. Si la transition inverse est nulle, la matrice ne peut pas vérifier (K) : sinon, 9 et 1.a) imposeraient cette transition inverse non nulle. Le retour `False` est donc justifié. Le test `ell == 0` protège aussi les accès suivants grâce à l'évaluation de or de gauche à droite, qui cesse dès qu'une proposition est vraie.

Si les deux transitions sont non nulles, le quotient choisi appartient à $]0, 1]$, donc l'opération est définie et ajoute exactement un sommet à I . Le programme termine après au plus $r - 1$ étapes. Si M vérifie (K) , 19 montre que la matrice finale est symétrique et

le programme renvoie True. Réciproquement, s'il renvoie True, les opérations ont conduit à une matrice symétrique et 20 implique que la matrice initiale vérifiait (K). Ainsi la réponse est correcte en arithmétique exacte.

Le programme modifie son argument. Avec des coefficients flottants, l'égalité finale exacte peut échouer à cause des arrondis ; remplacer ce test par un test approché fournit seulement un diagnostic numérique, pas une preuve de réversibilité. Pour appliquer exactement le code à des données rationnelles, on peut utiliser un tableau de fractions Python, avec leur documentation : `Fraction(a,b)` représente exactement le rationnel a/b ; `dtype=object` conserve ces objets dans un tableau NumPy. Par exemple :

Python

```
from fractions import Fraction

M = np.array([[Fraction(1, 3), Fraction(2, 3), Fraction(0)],
              [Fraction(1, 3), Fraction(0), Fraction(2, 3)],
              [Fraction(0), Fraction(2, 3), Fraction(1, 3)]],
              dtype=object)

resultat = estRev(M)
```

Cet exemple est un moyen de vérifier l'implémentation ; la maîtrise de la bibliothèque `fractions` n'est pas demandée au candidat. Les quotients `y` sont exacts et `resultat` vaut True pour la matrice de la question 3.

Relevé des adaptations

21.b) L'appel `OpLigne` du PDF est rectifié en `opLigne` pour correspondre au nom défini en 16 : Python distingue les majuscules et les minuscules. La distinction entre arithmétique exacte et calcul flottant et la syntaxe `.all()` sont documentées pour préciser la portée du test, sans changer l'algorithme mathématique.

16 et 21.b) La modification sur place de la matrice est explicitée pour rendre cohérents les appels de l'algorithme.

3.a) Le graphe demandé est donné en SVG dans le corrigé, avec les probabilités exactes de la matrice.