



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Mathématiques appliquées

2024

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On rappelle que la notation

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n}$$

est analogue à la notation

$$\sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}.$$

Partie 1 — Énergie et trace d'une matrice

1. Soit A une matrice carrée symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence d'une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Que peut-on dire des éléments diagonaux de $P^{-1}AP$?

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$, on pose alors

$$\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|;$$

on nomme ce réel positif l'énergie de A .

On admet que cette somme ne dépend pas du choix de P .

2. Montrer que $\mathcal{E}(A) = 3$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Écrire une fonction Python `energie(A)` qui renvoie l'énergie de la matrice symétrique représentée par le tableau NumPy `A`.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A , notée $\text{Tr}(A)$, par :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

4. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

4.a) Montrer que :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}.$$

4.b) En déduire que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ et que

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2.$$

Que peut-on dire de A si $\text{Tr}({}^tAA) = 0$?

4.c) Si A et B sont semblables, montrer que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

5. Dans cette question, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique et on utilise les notations de la question 1.

5.a) Montrer que $|\text{Tr}(A)| \leq \mathcal{E}(A)$.

5.b) Justifier que

$$\text{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

6. Dans la console Python, on obtient :

Python

```
energie(3*np.eye(3)-np.ones([3,3]))  
  
# Résultat affiché : 6.0
```

6.a) Déterminer quelle est la matrice A associée au tableau

`3*np.eye(3)-np.ones([3,3])`.

6.b) En calculant $\text{Tr}(A)$, $\text{Tr}(A^2)$ et en déterminant une valeur propre évidente de A , expliciter son spectre et retrouver son énergie.

Partie 2 — Produit de Kronecker $2 \times n$ de matrices symétriques

Soit $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique et A une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

On définit $U * A$ la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ que l'on peut naturellement

représenter ainsi : $\begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix}$ (écriture par blocs).

Par exemple, si $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $U * A = \begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 0_3 \end{pmatrix}$ par blocs,

d'où :

$$U * A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où 0_3 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$ est une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$,

avec $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$.

On admet qu'alors la matrice colonne $(U * A)X$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ est égale à

$$\begin{pmatrix} uAX_1 + vAX_2 \\ vAX_1 + wAX_2 \end{pmatrix}.$$

7.a) Écrire une fonction Python `prod2K(u,v,w,A)` qui, étant donné $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ et A ,

représentée par un tableau NumPy, renvoie $U * A$ sous la forme d'un tableau NumPy.

7.b) Compléter le code suivant s'affichant dans la console Python :

Python

```
prod2K(..., -1, ..., ...)
# Tableau renvoyé :
# array([[ -2.,  1.,  2., -1.],
#        [ 1., -2., -1.,  2.],
#        [ 2., -1., -4.,  2.],
#        [-1.,  2.,  2., -4.]])
```

8. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre de U pour la valeur propre λ et X un vecteur propre de

$$A \text{ pour } \mu. \text{ On pose } Y = \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}.$$

8.a) Établir l'égalité $(U * A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua + vb)X \\ (va + wb)X \end{pmatrix}$.

8.b) Montrer que Y est un vecteur propre de $U * A$ et préciser pour quelle valeur propre.

9.a) Justifier l'existence d'une base

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et de $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formées de vecteurs propres de U et de A respectivement.

On note γ_1 et γ_2 les valeurs propres associées à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ respectivement et $\mu_1, \dots, \mu_n$

celles associées à $X_1, \dots, X_n$ respectivement.

On pose, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Y_i = \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix}$ et $Z_i = \begin{pmatrix} cX_i \\ dX_i \end{pmatrix}$.

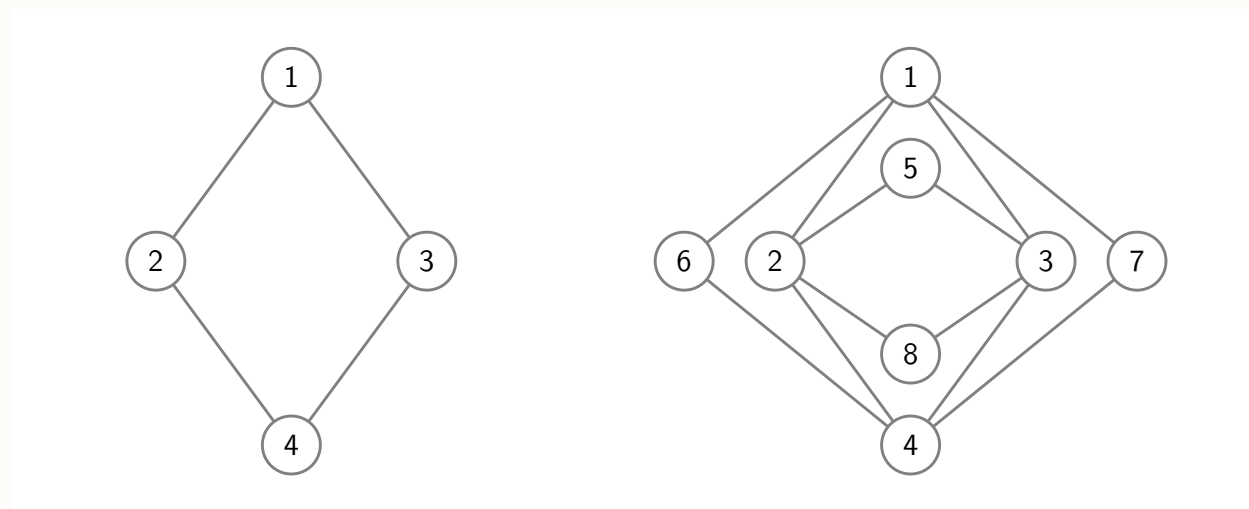
9.b) Montrer que la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est libre.

9.c) En déduire que $U * A$ est semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

9.d) En conclure que $\mathcal{E}(U * A) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A)$.

10. Un exemple — On considère un graphe G_n , non orienté et sans boucle, dont les sommets sont $1, \dots, n$ et l'ensemble des arêtes est noté $\mathcal{A}_n$. On définit le graphe G_{2n} dont les sommets sont $1, \dots, 2n$ et les arêtes sont celles de G_n , ainsi que, pour toute arête $\{i, j\} \in \mathcal{A}_n$, les arêtes $\{i + n, j\}$ et $\{i, j + n\}$.

Voici un exemple de représentation de G_4 et G_8 :



On note A_n et A_{2n} les matrices d'adjacence de G_n et de G_{2n} .

10.a) Déterminer U telle que $A_{2n} = U * A_n$.

10.b) En déduire que $\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5} \mathcal{E}(A_n)$.

Partie 3 — Encadrement de l'énergie d'une matrice d'adjacence

Soit m, n et p des entiers tels que $m \geq 1, n \geq p \geq 2$.

On suppose dans cette partie que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe $G(A)$, non orienté sans boucle, à n sommets $1, \dots, n$, m arêtes et $n - p$ sommets isolés, c'est-à-dire de degré 0.

On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et I l'ensemble des sommets non isolés de $G(A)$.

11.a) Montrer que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m.$$

11.b) Établir que $1 \leq \frac{2m}{p} \leq p - 1$.

12.a) Justifier qu'il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale différente de la matrice nulle.

Dans la suite, on note D cette matrice diagonale.

12.b) En déduire que $\text{Tr}(D) = 0$ et

$$\text{Tr}(D^2) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = 2m.$$

On suppose dans la suite que P est telle que les éléments diagonaux de D , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, vérifient $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. On pose $\theta = \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$.

13.a) Soit k un sommet isolé. Montrer que $E_k \in \text{Ker}(A)$.

En déduire que $\dim(\text{Ker}(A)) \geq n - p$ puis que, si $p < n$, $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

13.b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = 2m$$

puis que $0 < \theta \leq \sqrt{2m}$.

13.c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_r$ des réels. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq r} 2x_i x_j \leq \sum_{1 \leq i, j \leq r} (x_i^2 + x_j^2).$$

En déduire que

$$\left(\sum_{i=1}^r x_i \right)^2 \leq r \left(\sum_{i=1}^r x_i^2 \right).$$

13.d) En conclure que $\mathcal{E}(A) \leq \theta + \sqrt{(p-1)(2m - \theta^2)}$.

14. On admet qu'on peut choisir la matrice P de la question 12.a) de sorte que

$$P^{-1} = {}^t P. \text{ On pose alors } Q = {}^t P.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = QX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On admet que si M est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Z une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^t(MZ) = {}^t Z {}^t M$.

Si U et V sont deux matrices colonnes appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t UV$ est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$; on l'identifie à son unique coefficient. Donc ${}^t UV \in \mathbb{R}$.

14.a) Montrer que $Q^{-1} = {}^t Q$ puis que $A = {}^t Q D Q$ et ${}^t Y Y = {}^t X X$.

14.b) Montrer que

$${}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2.$$

14.c) En remarquant que

$$\sum_{k=1}^n y_k^2 = {}^tYY,$$

en déduire que ${}^tXAX \leq \theta {}^tXX$.

15. Soit U la matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le i -ème coefficient vaut 1 si i n'est pas isolé et 0 sinon.

15.a) Montrer que

$${}^tUAU = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m.$$

En déduire que $\frac{2m}{p} \leq \theta$.

15.b) Établir que $\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$.

16.a) Étudier la fonction $F : x \mapsto x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ sur $[0, 1]$.

16.b) En déduire que $\mathcal{E}(A) \leq \sqrt{2m} F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{E}(A) \leq \frac{2m}{p} + \frac{1}{p} \sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)}. \quad (1)$$

17. On suppose dans cette question que A est la matrice d'adjacence d'un graphe complet de sommets $1, \dots, n$, donc $m = \frac{n(n-1)}{2}$ et $p = n$.

17.a) Représenter la matrice A .

17.b) Montrer que -1 est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

17.c) Établir aussi que $n - 1$ est une valeur propre de A . En déduire que $\mathcal{E}(A) = 2(n - 1)$ et que l'inégalité (1) est alors une égalité.

On note $\alpha = \min_{1 \leq k \leq p} |\lambda_k|$ et $\beta = \max_{1 \leq k \leq p} |\lambda_k|$. On note aussi d le degré maximal des sommets du graphe $G(A)$.

18. Écrire une fonction Python `degMax(A)` qui renvoie le maximum des degrés des sommets du graphe $G(A)$, celui-ci étant donné par sa matrice d'adjacence sous la forme du tableau NumPy A .

19.a) Montrer que, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $|\lambda_j|(\alpha + \beta) \geq \lambda_j^2 + \alpha\beta$.

19.b) En déduire que $(\alpha + \beta)\mathcal{E}(A) \geq \text{Tr}(A^2) + p\alpha\beta$, puis que $\mathcal{E}(A) \geq \frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta}$.

19.c) Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leq b^2$. Étudier les variations de $\varphi : t \mapsto \frac{a + bt}{b + t}$ sur $\mathbb{R}^+$.

19.d) Montrer que $2m \leq p\beta^2$. En déduire que $\mathcal{E}(A) \geq \frac{2m}{\beta}$.

20. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \beta$.

20.a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta|x_i| \leq d \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

20.b) En conclure que $\mathcal{E}(A) \geq \frac{2m}{d} \geq \frac{2m}{p-1}$. (2)

20.c) Montrer que l'égalité dans (2) est réalisée pour la matrice A carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au graphe dont l'unique arête est $\{1, 2\}$.

Aide-mémoire Python

On suppose que l'on a exécuté les instructions suivantes en début de session :

Python

```
import numpy as np  
import numpy.linalg as al
```

Si T est un tableau NumPy, `np.shape(T)` renvoie le nombre de lignes et de colonnes de T , dans cet ordre, sous la forme d'un couple.

`np.zeros([p,q])` crée un tableau NumPy à p lignes et q colonnes ne contenant que des 0.

`np.ones([p,q])` crée un tableau NumPy à p lignes et q colonnes ne contenant que des 1.

`np.eye(p)` crée un tableau NumPy à p lignes et p colonnes ne contenant que des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs.

La fonction `al.eigvals`, appliquée à un tableau NumPy représentant une matrice symétrique A , renvoie le tableau des coefficients d'une matrice diagonale semblable à A .