



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Mathématiques appliquées

2024

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 1 — Énergie et trace d'une matrice

1. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, résultat admis du programme. Il existe donc P inversible et une matrice diagonale réelle D tels que $D = P^{-1}AP$.

En écrivant $AP = PD$, la k -ème colonne C_k de P vérifie $AC_k = D_{k,k}C_k$. Comme $C_k \neq 0$, chaque élément diagonal de D est une valeur propre de A . La liste des n éléments diagonaux est la liste des valeurs propres répétées suivant la dimension de leurs sous-espaces propres.

2. Cherchons une base propre par des vecteurs à deux dernières coordonnées égales et par leur différence. Pour $V = (0, 1, -1)^t$, $AV = 0$. De plus :

$${}^t(A(2, -1, -1)) = (4, -2, -2)^t = 2(2, -1, -1)^t,$$

$${}^t(A(1, 1, 1)) = (-1, -1, -1)^t = -(1, 1, 1)^t.$$

Ces trois vecteurs non nuls correspondent aux valeurs propres distinctes $0, 2, -1$; ils forment donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc une base. Ainsi $\mathcal{E}(A) = |0| + |2| + |-1| = 3$.

3. La fonction documentée `al.eigvals` fournit la liste des valeurs propres ; on additionne leurs valeurs absolues.

Python

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def energie(A):
    valeurs = al.eigvals(A)
    total = 0
    for valeur in valeurs:
        total = total + abs(valeur)
    return total
```

L'entrée est une matrice symétrique réelle carrée. La boucle traite toutes les valeurs propres, répétitions comprises. Le résultat numérique est une approximation de leur somme exacte ; il vaut 3 à l'arrondi numérique pour la matrice de la question 2.

4.a) Par définition du produit matriciel,

$$(AB)_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i}.$$

En sommant les coefficients diagonaux :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}.$$

Les sommes sont finies, donc tous les regroupements sont licites.

4.b) En échangeant les indices i et j dans la somme précédente :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i,j} b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j,i} b_{j,i} a_{i,j} = \text{Tr}(BA).$$

En remplaçant le premier facteur par ${}^t A$, ses coefficients sont $a_{j,i}$, d'où :

$$\text{Tr}({}^t A A) = \sum_{i,j} a_{j,i}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2.$$

Une somme finie de carrés est nulle si et seulement si tous ses termes le sont. Ainsi $\text{Tr}({}^t A A) = 0$ entraîne $a_{i,j} = 0$ pour tous i, j , donc $A = 0_n$; la réciproque est également vraie.

4.c) Il existe une matrice inversible S telle que $B = S^{-1} A S$. En appliquant 4.b) aux deux matrices $S^{-1} A$ et S :

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}((S^{-1} A) S) = \text{Tr}(S(S^{-1} A)) = \text{Tr}(A).$$

La trace est donc conservée par similitude ; ce résultat a été établi ici à partir de sa définition.

5.a) Par 4.c),

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D) = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$|\text{Tr}(A)| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| = \mathcal{E}(A).$$

5.b) La relation $A = PDP^{-1}$ entraîne $A^2 = PD^2P^{-1}$. Les matrices A^2 et D^2 sont semblables, et D^2 a pour coefficients diagonaux $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$. Par 4.c) :

$$\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

6.a) Le tableau `np.eye(3)` représente I_3 et `np.ones([3,3])` la matrice J_3 dont tous les coefficients valent 1. Ainsi :

$$A = 3I_3 - J_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.b) Méthode 1 — Les deux sommes de valeurs propres

La somme des coefficients de chaque ligne est nulle, donc $t(A(1, 1, 1)) = 0$ et 0 est valeur propre. La matrice est symétrique, donc on peut compléter cette valeur par deux valeurs propres réelles u, v dans une diagonalisation.

On a $\text{Tr}(A) = 6$. Par 4.b) et la symétrie,

$$\text{Tr}(A^2) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = 3 \times 4 + 6 \times 1 = 18.$$

Ainsi $u + v = 6$ et $u^2 + v^2 = 18$.

L'identité $2(u^2 + v^2) - (u + v)^2 = (u - v)^2$ donne $(u - v)^2 = 36 - 36 = 0$. Donc $u = v = 3$, le spectre est $\{0, 3\}$ et $\mathcal{E}(A) = 0 + 3 + 3 = 6$.

Méthode 2 — Action de la matrice de coefficients tous égaux à un

Pour $X = (x_1, x_2, x_3)^t$, $J_3 X = (x_1 + x_2 + x_3)(1, 1, 1)^t$. Si $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, alors $AX = 3X$. Les vecteurs $(1, -1, 0)^t$ et $(1, 0, -1)^t$ sont libres, appartiennent à ce plan et sont donc deux vecteurs propres pour 3. Avec $(1, 1, 1)^t$, vecteur propre pour 0, ils donnent une base propre. On retrouve les valeurs diagonales 0, 3, 3 et l'énergie 6.

La première méthode exploite les traces demandées ; la seconde explique la structure des sous-espaces propres.

Partie 2 — Produit de Kronecker $2 \times n$ de matrices symétriques

7.a) On remplit directement les quatre blocs, avec les indices Python allant de 0 à $n - 1$.

Python

```
import numpy as np

def prod2K(u, v, w, A):
    n = np.shape(A)[0]
    B = np.zeros([2*n, 2*n])
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            B[i, j] = u*A[i, j]
```

```

    B[i, n+j] = v*A[i, j]
    B[n+i, j] = v*A[i, j]
    B[n+i, n+j] = w*A[i, j]

return B

```

Pour chaque coefficient de A , la double boucle affecte les quatre coefficients correspondants de la matrice résultat. Le tableau renvoyé a $2n$ lignes et $2n$ colonnes, avec exactement les blocs prescrits.

7.b) Le bloc supérieur droit est $-A$ puisque $v = -1$. Il impose donc $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Le bloc supérieur gauche est A , donc $u = 1$, et le bloc inférieur droit est $2A$, donc $w = 2$.

Python

```

import numpy as np

prod2K(1, -1, 2, np.array([[ -2, 1], [1, -2]]))

```

L'appel utilise la fonction complète de 7.a) et produit bien le tableau donné.

8.a) Par l'égalité de multiplication par blocs admise dans le sujet et par $AX = \mu X$:

$$(U * A)Y = \begin{pmatrix} uaAX + vbAX \\ vaAX + wbAX \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} (ua + vb)X \\ (va + wb)X \end{pmatrix}.$$

8.b) L'hypothèse ${}^t(U(a, b)) = \lambda(a, b)^t$ donne $ua + vb = \lambda a$ et $va + wb = \lambda b$. Ainsi $(U * A)Y = \lambda\mu Y$.

Il reste à vérifier $Y \neq 0$. Le vecteur $(a, b)^t$ est non nul, donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, et $X \neq 0$; le bloc correspondant de Y est non nul. Par conséquent Y est un vecteur propre de $U * A$ pour la valeur propre $\lambda\mu$, y compris si ce produit est nul.

9.a) Les matrices U et A sont symétriques réelles. Le résultat de diagonalisation des matrices symétriques réelles assure, pour chacune, l'existence d'une base de vecteurs

propres réels. Cela fournit exactement les deux bases demandées, même si certaines valeurs propres sont répétées.

9.b) Soient $s_1, t_1, \dots, s_n, t_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^n (s_i Y_i + t_i Z_i) = 0.$$

Les deux blocs de cette égalité donnent :

$$\sum_{i=1}^n (as_i + ct_i) X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (bs_i + dt_i) X_i = 0.$$

La famille $(X_1, \dots, X_n)$ étant libre, on a, pour chaque i , $as_i + ct_i = 0$ et $bs_i + dt_i = 0$. Cela signifie $s_i(a, b)^t + t_i(c, d)^t = 0$. La liberté de ces deux vecteurs entraîne $s_i = t_i = 0$.

Tous les coefficients de la relation initiale sont nuls : la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est libre.

9.c) Cette famille contient $2n$ vecteurs dans un espace de dimension $2n$; elle est donc une base. Par 8.b), Y_i est propre pour $\gamma_1 \mu_i$ et Z_i pour $\gamma_2 \mu_i$. Si S est la matrice ayant pour colonnes ces vecteurs dans l'ordre indiqué, alors :

$$S^{-1}(U * A)S = \text{diag}(\gamma_1 \mu_1, \gamma_2 \mu_1, \dots, \gamma_1 \mu_n, \gamma_2 \mu_n).$$

C'est la similitude demandée. La matrice $U * A$ est en outre symétrique, puisque ses blocs diagonaux sont symétriques et ses deux blocs hors diagonale sont identiques et symétriques ; son énergie est donc définie.

9.d) En utilisant cette diagonalisation et $|xy| = |x| |y|$:

$$\mathcal{E}(U * A) = \sum_{i=1}^n (|\gamma_1 \mu_i| + |\gamma_2 \mu_i|) = (|\gamma_1| + |\gamma_2|) \sum_{i=1}^n |\mu_i| = \mathcal{E}(U) \mathcal{E}(A).$$

10.a) Les arêtes entre les n premiers sommets sont celles de G_n , donc le bloc supérieur gauche vaut A_n . Les arêtes entre les n derniers sommets sont absentes, donc le bloc

inférieur droit est nul. Les arêtes entre les deux groupes reproduisent les adjacences de G_n , donc les deux autres blocs valent A_n .

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0_n \end{pmatrix} = U * A_n, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.b) Déterminons les valeurs propres de U sans calcul de déterminant. Un vecteur propre $(a, b)^t$ pour t vérifie $a + b = ta$ et $a = tb$. On a nécessairement $b \neq 0$, car $b = 0$ imposerait $a = 0$. En substituant $a = tb$, on obtient $t^2 - t - 1 = 0$.

Les deux racines réelles sont $t_+ = (1 + \sqrt{5})/2 > 0$ et $t_- = (1 - \sqrt{5})/2 < 0$.

Réciproquement, pour chacune de ces racines, $(t, 1)^t$ est un vecteur propre. Ces deux valeurs distinctes donnent une base propre, d'où :

$$\mathcal{E}(U) = t_+ - t_- = \sqrt{5}.$$

La question 9.d) donne alors $\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5} \mathcal{E}(A_n)$.

Partie 3 — Encadrement de l'énergie d'une matrice d'adjacence

11.a) Un sommet isolé a une ligne et une colonne nulles dans A . Tous les termes non nuls de la somme totale ont donc leurs deux indices dans I , ce qui prouve la première égalité.

Chaque arête $\{i, j\}$ d'un graphe non orienté sans boucle fournit exactement deux coefficients égaux à 1, $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$. Les autres coefficients valent 0 ; par conséquent la somme est $2m$.

11.b) Chaque sommet de I a un degré compris entre 1 et $p - 1$, car il est non isolé et ses voisins sont parmi les $p - 1$ autres sommets non isolés. La somme des degrés des p sommets de I vaut $2m$ par 11.a). Ainsi $p \leq 2m \leq p(p - 1)$ et, en divisant par $p > 0$, $1 \leq 2m/p \leq p - 1$.

12.a) La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il existe P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Puisque

$m \geq 1$, la matrice A a au moins un coefficient égal à 1 et n'est pas nulle. Si $D = 0_n$, alors $A = PDP^{-1} = 0_n$, contradiction. Donc $D \neq 0_n$.

12.b) L'absence de boucle donne $a_{i,i} = 0$, donc $\text{Tr}(A) = 0$. Par 4.c), $\text{Tr}(D) = 0$.

Les matrices D^2 et A^2 sont semblables. Par la symétrie de A , 4.b) et 11.a), et parce que $a_{i,j}^2 = a_{i,j}$ pour des coefficients dans $\{0, 1\}$:

$$\text{Tr}(D^2) = \text{Tr}(A^2) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j} = 2m.$$

13.a) Le vecteur AE_k est la k -ème colonne de A . Si k est isolé, cette colonne est nulle, donc $E_k \in \text{Ker}(A)$.

Les $n - p$ vecteurs canoniques associés aux sommets isolés sont libres. Le noyau contient donc une famille libre de $n - p$ éléments, d'où $\dim \text{Ker}(A) \geq n - p$.

La relation $A = PDP^{-1}$ donne $AX = 0$ si et seulement si $D(P^{-1}X) = 0$. L'application inversible P^{-1} met donc les deux noyaux en bijection linéaire, et ils ont même dimension. Pour une matrice diagonale, cette dimension est le nombre de coefficients diagonaux nuls. Au moins $n - p$ des λ_k sont donc nuls. Leur classement par valeurs absolues décroissantes implique, si $p < n$, $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

13.b) Par 12.b) et 13.a),

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 2m.$$

Cette somme est strictement positive, donc au moins une valeur propre est non nulle. Comme leur somme vaut $\text{Tr}(D) = 0$, elles ne peuvent pas toutes être négatives ou nulles : sinon leur somme serait strictement négative. Il existe donc une valeur propre strictement positive et $\theta > 0$.

En choisissant un indice k tel que $\lambda_k = \theta$, on a

$$\theta^2 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = 2m.$$

Par positivité, $0 < \theta \leq \sqrt{2m}$.

13.c) Pour chaque couple (i, j) , $(x_i - x_j)^2 \geq 0$, donc $2x_i x_j \leq x_i^2 + x_j^2$. En sommant sur tous les couples :

$$\sum_{i,j} 2x_i x_j \leq \sum_{i,j} (x_i^2 + x_j^2).$$

Le membre de gauche vaut

$$2\left(\sum_i x_i\right)^2.$$

Dans le membre de droite, chaque x_i^2 est compté r fois dans la première somme et r fois dans la seconde : il vaut

$$2r \sum_i x_i^2.$$

En divisant par 2, on obtient bien

$$\left(\sum_i x_i\right)^2 \leq r \sum_i x_i^2.$$

13.d) Choisissons $\ell \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\lambda_\ell = \theta$; cet indice existe puisque $\theta > 0$ et les

indices supérieurs à p correspondent à des zéros. Alors :

$$\mathcal{E}(A) = \theta + \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq \ell}} |\lambda_k|.$$

Appliquons 13.c) aux $p - 1 \geq 1$ réels $|\lambda_k|$ de cette somme. Son carré est au plus

$$(p - 1) \sum_{k \neq \ell} \lambda_k^2 = (p - 1)(2m - \theta^2).$$

Les deux membres étant positifs ou nuls, on peut prendre les racines carrées :

$$\mathcal{E}(A) \leq \theta + \sqrt{(p - 1)(2m - \theta^2)}.$$

14.a) Le choix particulier de P avec $P^{-1} = {}^tP$ est admis dans l'énoncé ; on utilise uniquement cette identité. Puisque $Q = {}^tP = P^{-1}$, on a $Q^{-1} = P = {}^tQ$. La relation $D = P^{-1}AP = QAQ^{-1}$ donne donc $A = {}^tQDQ$.

Avec $Y = QX$ et la règle de transposition admise :

$${}^tYY = {}^tX {}^tQQX = {}^tXQ^{-1}QX = {}^tXX.$$

14.b) En substituant l'expression de A :

$${}^tXAX = {}^tX {}^tQDQX = {}^t(QX)D(QX) = {}^tYDY.$$

Comme D est diagonale, la dernière expression est exactement

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2.$$

14.c) Pour chaque k , $\lambda_k \leq \theta$ et $y_k^2 \geq 0$. Ainsi :

$${}^tXAX = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \leq \theta \sum_{k=1}^n y_k^2 = \theta {}^tYY = \theta {}^tXX.$$

Cette démonstration ne suppose pas les λ_k positifs.

15.a) Notons u_i les coefficients de U , égaux à 1 sur I et à 0 ailleurs. Le produit matriciel donne :

$${}^tUAU = \sum_{i,j} u_i a_{i,j} u_j = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m.$$

D'autre part,

$${}^tUU = \sum_i u_i^2 = p.$$

Par 14.c) appliquée à $X = U$, $2m \leq \theta p$. Puisque $p > 0$, on en déduit $2m/p \leq \theta$.

15.b) L'inégalité $p \leq 2m$ de 11.b) donne, en prenant les racines carrées puis en divisant par p , $1/\sqrt{p} \leq \sqrt{2m}/p$.

La question 15.a), divisée par $\sqrt{2m} > 0$, donne $\sqrt{2m}/p \leq \theta/\sqrt{2m}$. Enfin 13.b) donne $\theta/\sqrt{2m} \leq 1$. Les trois comparaisons s'enchaînent comme demandé.

16.a) La fonction F est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Pour $0 < x < 1$:

$$F'(x) = 1 - \frac{\sqrt{p-1}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Les deux quantités $\sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{p-1}x$ sont positives sur cet intervalle. Leur comparaison peut donc être faite en comparant leurs carrés. Ainsi $F'(x) > 0$ équivaut à $1-x^2 > (p-1)x^2$, soit $x < 1/\sqrt{p}$. On a $F'(1/\sqrt{p}) = 0$, puis $F'(x) < 0$ pour $x > 1/\sqrt{p}$.

Donc F est strictement croissante sur $[0, 1/\sqrt{p}]$, puis strictement décroissante sur $[1/\sqrt{p}, 1]$. Ses valeurs utiles sont :

$$F(0) = \sqrt{p-1}, \quad F(1/\sqrt{p}) = \sqrt{p}, \quad F(1) = 1.$$

Pour la valeur au maximum, on utilise $\sqrt{(p-1)(1-1/p)} = (p-1)/\sqrt{p}$.

16.b) La borne de 13.d) se réécrit :

$$\mathcal{E}(A) \leq \sqrt{2m} F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right).$$

Par 15.b), les deux nombres $\sqrt{2m}/p$ et $\theta/\sqrt{2m}$ appartiennent à $[1/\sqrt{p}, 1]$, où F est décroissante, et le premier est inférieur ou égal au second. Par conséquent :

$$F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right) \leq F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right).$$

En multipliant par $\sqrt{2m} > 0$ et en développant l'expression de F :

$$\mathcal{E}(A) \leq \frac{2m}{p} + \sqrt{2m} \sqrt{(p-1) \left(1 - \frac{2m}{p^2}\right)} = \frac{2m}{p} + \frac{1}{p} \sqrt{(p-1)2m(p^2 - 2m)}.$$

Les radicandes sont positifs ou nuls ; en particulier $2m \leq p(p-1) < p^2$ par 11.b).

17.a) Un graphe complet sans boucle relie chaque paire de sommets distincts. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J_n - I_n,$$

où J_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

17.b) Pour $X = (x_1, \dots, x_n)^t$,

$$J_n X = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)(1, \dots, 1)^t.$$

L'égalité $AX = -X$ équivaut donc à $J_n X = 0$, c'est-à-dire à

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Ce sous-espace contient la famille $(E_1 - E_n, \dots, E_{n-1} - E_n)$. Elle est libre, car les $n - 1$ premières coordonnées d'une combinaison nulle donnent directement la nullité de chacun de ses coefficients. Elle est génératrice : si

$$\sum_i x_i = 0,$$

alors

$$x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

et

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} x_i (E_i - E_n).$$

Le sous-espace propre pour -1 a donc dimension $n - 1$. Comme $n \geq 2$, il contient des vecteurs non nuls : -1 est bien valeur propre.

17.c) Pour $V = (1, \dots, 1)^t$, chaque ligne de A contient $n - 1$ coefficients égaux à 1, donc $AV = (n - 1)V$. La valeur $n - 1$ est donc propre. Le vecteur V n'appartient pas au sous-espace de 17.b), car la somme de ses coordonnées vaut $n \neq 0$.

En ajoutant V à la base construite en 17.b), on obtient une base propre complète. Les éléments diagonaux d'une diagonalisation sont -1 répété $n - 1$ fois, et $n - 1$ une fois. Ainsi $\mathcal{E}(A) = (n - 1) + (n - 1) = 2(n - 1)$.

Dans la borne (1), $p = n$ et $2m = n(n - 1)$. Le premier terme est $n - 1$ et le second vaut :

$$\frac{1}{n} \sqrt{(n-1)n(n-1)(n^2 - n(n-1))} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2(n-1)^2} = n-1.$$

Le membre de droite est donc $2(n-1)$, égal à l'énergie : (1) est une égalité.

18. Le degré du sommet d'indice Python i est la somme des coefficients de la ligne i .
On calcule ces sommes et on conserve la plus grande.

Python

```
import numpy as np

def degMax(A):
    n = np.shape(A)[0]
    maximum = 0
    for i in range(n):
        degre = 0
        for j in range(n):
            degre = degre + A[i, j]
        if degre > maximum:
            maximum = degre
    return maximum
```

À la fin de la boucle intérieure, degre vaut le degré du sommet considéré. Après chaque itération extérieure, maximum est le plus grand degré des sommets déjà parcourus ; à la sortie, il vaut donc d .

- 19.a) Par définition de α et β , $\alpha \leq |\lambda_j| \leq \beta$ pour $1 \leq j \leq p$. Les facteurs de $(|\lambda_j| - \alpha)(\beta - |\lambda_j|)$ sont positifs ou nuls. En développant :

$$0 \leq (|\lambda_j| - \alpha)(\beta - |\lambda_j|) = (\alpha + \beta)|\lambda_j| - \lambda_j^2 - \alpha\beta.$$

On obtient ainsi l'inégalité demandée.

19.b) En sommant pour $j = 1, \dots, p$, on trouve :

$$(\alpha + \beta) \sum_{j=1}^p |\lambda_j| \geq \sum_{j=1}^p \lambda_j^2 + p\alpha\beta = 2m + p\alpha\beta.$$

Les valeurs propres après l'indice p étant nulles, la somme des valeurs absolues vaut $\mathcal{E}(A)$. De plus, $2m > 0$ et

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j^2 = 2m,$$

donc $\beta > 0$. Comme $\alpha \geq 0$, on peut diviser par $\alpha + \beta > 0$:

$$\mathcal{E}(A) \geq \frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

19.c) Pour $t \geq 0$, le dénominateur $b + t$ est strictement positif. La fonction φ est dérivable et :

$$\varphi'(t) = \frac{b(b+t) - (a+bt)}{(b+t)^2} = \frac{b^2 - a}{(b+t)^2} \geq 0.$$

Si $a < b^2$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, part de $\varphi(0) = a/b$ et tend vers b quand $t \rightarrow +\infty$. Si $a = b^2$, elle est constante égale à b . Dans les deux cas, $\varphi(t) \geq a/b$ pour $t \geq 0$.

19.d) Méthode 1 — Utilisation de la fonction précédente

Puisque $|\lambda_j| \leq \beta$, on a $\lambda_j^2 \leq \beta^2$ pour chaque $j \leq p$. En sommant, $2m \leq p\beta^2$. On peut donc appliquer 19.c) à $a = 2m/p > 0$ et $b = \beta > 0$, puis à $t = \alpha \geq 0$. On obtient :

$$\frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta} = p \frac{2m/p + \beta\alpha}{\beta + \alpha} \geq p \frac{2m/p}{\beta} = \frac{2m}{\beta}.$$

La borne de 19.b) conclut que $\mathcal{E}(A) \geq 2m/\beta$.

Méthode 2 — Comparaison directe des sommes

Pour chaque $j \leq p$, $0 \leq |\lambda_j| \leq \beta$ implique $\lambda_j^2 \leq \beta|\lambda_j|$. On somme : $2m \leq \beta\mathcal{E}(A)$. Comme

$\beta > 0$, on retrouve $\mathcal{E}(A) \geq 2m/\beta$.

La première méthode suit le guidage et utilise simultanément α et β ; la seconde explique directement pourquoi la plus grande valeur absolue contrôle la somme des carrés.

20.a) L'égalité $AX = \lambda X$ donne, pour chaque i ,

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Par l'inégalité triangulaire et la positivité des coefficients :

$$\beta |x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) \max_j |x_j| \leq d \max_j |x_j|.$$

La somme des coefficients de la ligne i est en effet le degré du sommet i , inférieur ou égal à d .

20.b) Comme $X \neq 0$, le réel $M = \max_j |x_j|$ est strictement positif. Choisissons un indice i pour lequel $|x_i| = M$. La question 20.a) donne $\beta M \leq dM$, donc $\beta \leq d$.

Puisque le graphe possède au moins une arête, $d \geq 1$; en outre tout voisin d'un sommet non isolé est lui-même non isolé, donc $d \leq p-1$. Tous les dénominateurs suivants sont strictement positifs. Avec 19.d) :

$$\mathcal{E}(A) \geq \frac{2m}{\beta} \geq \frac{2m}{d} \geq \frac{2m}{p-1}.$$

On a ainsi établi (2).

20.c) Si la seule arête est $\{1, 2\}$, on a $m = 1$, $p = 2$ et $d = 1$. La matrice A a $a_{1,2} = a_{2,1} = 1$ et tous ses autres coefficients nuls.

Les vecteurs $E_1 + E_2$ et $E_1 - E_2$ sont propres pour 1 et -1 respectivement. Pour $k \geq 3$, $AE_k = 0$. Ces vecteurs forment une base : leurs deux premières coordonnées donnent deux vecteurs libres du plan engendré par E_1, E_2 , et les autres vecteurs sont les vecteurs canoniques restants. Pour $n = 2$, cette dernière liste est vide, ce qui ne change pas l'argument.

Donc $\mathcal{E}(A) = |1| + |-1| = 2$. Or $2m/d = 2$ et $2m/(p-1) = 2$. Les deux comparaisons de (2) sont ainsi des égalités.

Relevé des adaptations

10. La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les positions des sommets sont relevées graphiquement ; les arêtes sont déterminées exactement par la définition du graphe. Aucune donnée mathématique n'est modifiée.