



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Mathématiques appliquées

2023

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On s'intéresse aux processus de Markov finis homogènes à temps continu et à deux exemples de modélisation en lien avec des crédits bancaires. Le problème comporte quatre parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes de la partie 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. On considère une famille de variables aléatoires X_t , pour $t \in \mathbb{R}^+$, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les propriétés suivantes.

(H1) Pour tout $t \geq 0$, $X_t(\Omega) = \{1, \dots, n\}$.

(H2) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, tous réels positifs $t_1 < \dots < t_r$, tous $i_1, \dots, i_{r+1} \in \{1, \dots, n\}$ et tout réel positif s , si $P([X_{t_1} = i_1] \cap \dots \cap [X_{t_r} = i_r]) \neq 0$, alors

$$P_{[X_{t_1}=i_1] \cap \dots \cap [X_{t_r}=i_r]}(X_{t_r+s} = i_{r+1}) = P_{[X_{t_r}=i_r]}(X_{t_r+s} = i_{r+1}).$$

(H3) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $f_i : t \mapsto P(X_t = i)$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et n'est pas identiquement nulle. On note S_i l'ensemble des réels positifs t tels que $f_i(t) \neq 0$. En zéro, une dérivée désigne une dérivée à droite.

(H4) Pour tous $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i \neq j$, et $h \geq 0$, la fonction $t \mapsto P_{[X_t=i]}(X_{t+h} = j)$ est constante sur son ensemble de définition S_i . Il existe un réel positif $\alpha_{i,j}$ tel que, si $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,

$$P_{[X_t=i]}(X_{t+h} = j) = \alpha_{i,j}h + o(h) \quad (h \rightarrow 0^+).$$

(H5) Pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $h \geq 0$, la fonction $t \mapsto P_{[X_t=i]}(X_{t+h} = i)$ est constante sur S_i . Il existe un réel négatif ou nul $\alpha_{i,i}$ tel que, si $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,

$$P_{[X_t=i]}(X_{t+h} = i) = 1 + \alpha_{i,i}h + o(h) \quad (h \rightarrow 0^+).$$

Partie 1 — Matrice génératrice et système différentiel associés

On note L_t la matrice ligne d'ordre n ,

$$L_t = (P(X_t = 1) \ \dots \ P(X_t = n)) = (f_1(t) \ \dots \ f_n(t)),$$

et G la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les $\alpha_{i,j}$, appelée matrice génératrice du processus. On note aussi $L'_t = (f'_1(t) \ \dots \ f'_n(t))$. L'objectif des trois

premières questions est d'établir que, pour tout $t \geq 0$, $L'_t = L_t G$.

1. Montrer que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$P(X_{t+h} = j) = \sum_{i=1}^n P([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]).$$

2. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$. Justifier que

$$\sum_{j=1}^n P_{[X_t=i]}(X_{t+h} = j) = 1.$$

En déduire que

$$1 = 1 + \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \right) h + o(h) \quad (h \rightarrow 0^+),$$

puis que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} = 0.$$

3. a) Montrer que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$P(X_{t+h} = j) = P(X_t = j) + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i,j} h + o(h)) P(X_t = i) \quad (h \rightarrow 0^+).$$

3. b) En déduire, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $t \geq 0$ et $h > 0$,

$$\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} = \sum_{i=1}^n f_i(t) \alpha_{i,j} + o(1) \quad (h \rightarrow 0^+),$$

puis conclure que

$$f'_j(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \alpha_{i,j}.$$

3. c) Vérifier que $L'_t = L_t G$.

4. Probabilité moyenne d'être dans un état. Soit $T > 0$ et U_T une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, T]$. On pose $Z_{i,T} = f_i(U_T)$. Montrer que $E(Z_{i,T})$ existe et vaut $\frac{1}{T} \int_0^T f_i(t) dt$. On note $e_i(T)$ cette espérance.

5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et $G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$, où $a, b > 0$. On pose

$$p = \frac{b}{a+b}, q = 1 - p \text{ et } \alpha = f_1(0).$$

5. a) Montrer que f_1 vérifie sur $\mathbb{R}^+$ l'équation différentielle $y' + (a+b)y = b$.

5. b) En conclure que, pour tout $t \geq 0$,

$$f_1(t) = p + (\alpha - p) \exp(-(a+b)t), \quad f_2(t) = q - (\alpha - p) \exp(-(a+b)t).$$

5. c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f_1(t) \in [\min(p, \alpha), \max(p, \alpha)]$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = p$.

5. d) Déterminer $\lim_{T \rightarrow +\infty} e_1(T)$.

6. On suppose dans cette question que $n = 3$ et

$$G = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $t \geq 0$, on note C_t et C'_t les transposées de L_t et L'_t .

6. a) Montrer que $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{10}$ et 0 sont des valeurs propres de G .

6. b) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que

$$G = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

6. c) Calculer ${}^t P P$. En déduire que

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. d) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$P^{-1}C_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que $y'_1(t) = 0$, $y'_2(t) = -\frac{1}{10}y_2(t)$ et $y'_3(t) = -\frac{1}{6}y_3(t)$.

6. e) En conclure que, pour tout $t \geq 0$,

$$C_t = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-t/10} \\ \gamma e^{-t/6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}C_0,$$

puis que, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t = i) = \frac{1}{3}$.

7. Temps initial passé dans un état. On pose $\beta_i = -\alpha_{i,i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et on suppose, dans cette question, que $P(X_0 = i) \neq 0$ implique $\beta_i \neq 0$.

On définit les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ et Y égales au premier instant t où $X_t \neq i$ pour Y_i , et au premier instant t où $X_t \neq X_0$ pour Y . On admet que ces instants existent. Ainsi Y est à valeurs dans $]0, +\infty[$ et, si $X_0 \neq i$, $Y_i = 0$.

Soit i tel que $P(X_0 = i) \neq 0$. On admet que, pour tout $x > 0$, lorsque k est un entier naturel assez grand, $P(\bigcap_{j=0}^k [X_{jx/k} = i]) \neq 0$ et que

$$P(Y_i > x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P \left(\bigcap_{j=0}^k [X_{jx/k} = i] \right).$$

7. a) Montrer que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j=0}^k [X_{jx/k} = i]\right) &= P(X_0 = i) \prod_{j=0}^{k-1} P_{[X_{jx/k}=i]}(X_{(j+1)x/k} = i) \\ &= P(X_0 = i) \left(1 - \frac{\beta_i x}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k. \end{aligned}$$

7. b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $P_{[X_0=i]}(Y_i > x) = e^{-\beta_i x}$. Quelle est la loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle $P_{[X_0=i]}$?

7. c) Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$P(Y > x) = \sum_{k=1}^n P(X_0 = k) e^{-\beta_k x}.$$

7. d) En conclure que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y .

7. e) On note $I = \{k \in \{1, \dots, n\} : P(X_0 = k) \neq 0\}$. Établir que Y admet une espérance égale à

$$\sum_{k \in I} \frac{P(X_0 = k)}{\beta_k}.$$

Partie 2 — Matrice de transition, lien avec la matrice génératrice

On utilise les notations de la partie 1.

8. Définition de la matrice de transition. Pour tous $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $s \geq 0$ et $t \in S_i$, on pose $m_{i,j}(s) = P_{[X_t=i]}(X_{t+s} = j)$, quantité indépendante de t d'après (H4) et (H5). On note $M(s)$ la matrice de coefficient générique $m_{i,j}(s)$.

8. a) Établir que, pour tout $s \geq 0$, $L_s = L_0 M(s)$.

8. b) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $r \in S_i$. En utilisant (H2) et en distinguant les cas où $P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k])$ est nulle ou non, montrer que, pour tous $(j, k) \in \{1, \dots, n\}^2$ et $s, t \geq 0$,

$$P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = P(X_r = i) m_{i,k}(s) m_{k,j}(t).$$

En déduire que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $s, t \geq 0$,

$$P([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = P(X_r = i) \sum_{k=1}^n m_{i,k}(s) m_{k,j}(t).$$

8. c) En conclure que, pour tous $s, t \geq 0$, $M(s+t) = M(s)M(t)$.

8. d) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \geq 0$, $M(kt) = (M(t))^k$.

Si $(A_k)_{k \geq 1}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si $a_{i,j}(k)$ et $a_{i,j}$ sont leurs coefficients, on écrit $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$ lorsque chaque coefficient $a_{i,j}(k)$ converge vers $a_{i,j}$.

On admet, dans la suite de cette partie et dans la partie 3, que, pour tout $t \geq 0$,

$$M(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k} G \right)^k. \quad (E)$$

9. On veut simuler le processus à partir de G et de L_0 . Pour $t \in [0, 100]$, on utilise l'approximation numérique admise

$$M(t) \simeq \left(I_n + \frac{t}{1000} G \right)^{1000}.$$

Dans cette question, on suppose que $I_n + \frac{t}{1000} G$ a des coefficients positifs ou nuls pour tous les temps utilisés. Pour les tracés, $0 < t_{\max} \leq 100$ et cette condition vaut sur $[0, t_{\max}]$. Les simulations portent sur les transitions approchées ainsi obtenues.

On importe les bibliothèques suivantes.

Python

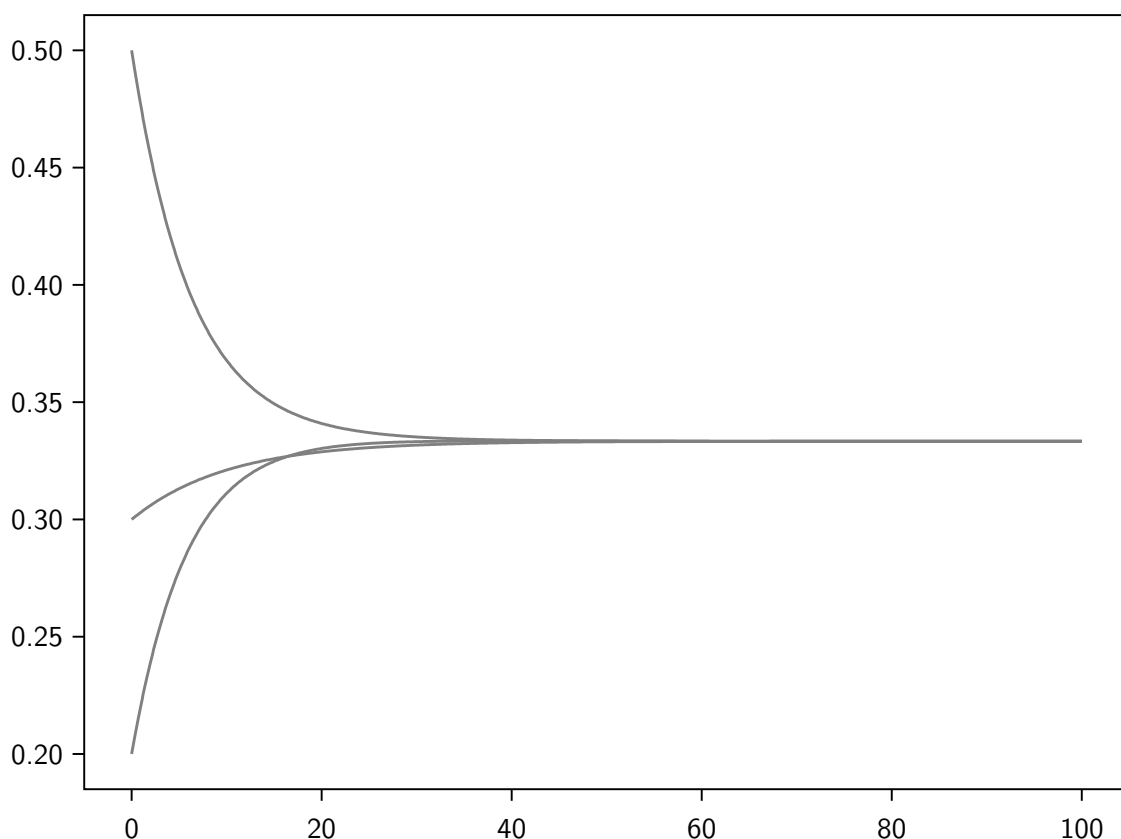
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.linalg as al
```

Si M est représentée par un tableau NumPy, $M[:, j]$ désigne la colonne d'indice Python j et $M[i, :]$ la ligne d'indice Python i . `al.matrix_power(A, k)` calcule la puissance matricielle entière A^k ; `np.eye(n)` crée I_n ; `np.linspace(a, b, N)` crée N valeurs régulièrement espacées de a à b , bornes comprises. `np.shape(A)[0]` donne le nombre de lignes. `np.dot(A, B)` calcule le produit matriciel, ou le produit d'une ligne par une matrice. `rd.random()` renvoie une réalisation uniforme sur $[0, 1[$. `plt.plot(x, y)` trace les points de coordonnées données et `plt.show()` affiche les tracés.

9. a) Écrire une fonction Python `transition(t, G)` de paramètres G , représentant une matrice génératrice carrée d'ordre n , et t , qui renvoie la matrice $\left(I_n + \frac{t}{1000}G\right)^{1000}$.
9. b) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `traceLoi2Xt(G, L0, tmax)` qui trace, sur un même graphique, les graphes des fonctions $t \mapsto P(X_t = i)$ sur $[0, t_{\max}]$ pour i variant de 1 à n , à l'approximation précédente près. G et L_0 représentent la matrice génératrice et la ligne L_0 . On utilisera 1000 points.
9. c) Si G est la matrice de la question 6, l'instruction suivante affiche la figure ci-dessous.

Python

```
traceLoi2Xt(np.array([[ -3, 1, 2], [1, -2, 1], [2, 1, -3]])) / 30,
            np.array([5, 3, 2]) / 10, 100)
```



Expliquer en quoi ce graphique est cohérent avec un résultat obtenu précédemment.

9. d) On veut simuler et représenter, sur un même graphique, les valeurs de $X_0, X_t, \dots, X_{kt}$, pour $0 < t \leq 100$ et $k \in \mathbb{N}^*$, à partir de la loi de X_0 donnée dans L0. Compléter la fonction suivante. La condition supplémentaire $j < \text{len}(Lt) - 1$ évite un dépassement d'indice dû à un éventuel arrondi de la somme des probabilités.

Python

```
def simulX(t, k, L0, G):
    listeDesT = []
    listeDesX = []
    Mt = transition(t, G)
    Lt = L0
    for i in range(k + 1):
        listeDesT.append(i * t)
        p = rd.random()
```

```
s = ...
j = 0
while p > ... and j < len(Lt) - 1:
    j += 1
    s += Lt[j]
Lt = ...
listeDesX.append(j + 1)
plt.plot(listeDesT, listeDesX)
plt.show()
```

Partie 3 — Deux exemples de modélisations

On conserve les notations des deux premières parties.

10. On considère trois états pour le recouvrement d'un crédit bancaire après un défaut de paiement et un accord entre le débiteur et l'organisme de crédit sur la somme à recouvrer :

- 1 : en cours de recouvrement, lorsque le débiteur est en train de régulariser sa créance ;
- 2 : recouvré, lorsque le débiteur a honoré la totalité du montant dû ;
- 3 : non recouvré, lorsque l'organisme de crédit considère que l'argent est définitivement perdu.

La matrice génératrice du processus est

$$G = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $L_0 = (1 \ 0 \ 0)$, où $\alpha, \beta > 0$.

10. a) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1}G$.

10. b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t ,

$$\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1}\right) G.$$

10. c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t ,

$$\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} = \frac{1 - \left(1 - (\alpha + \beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha + \beta},$$

et en déduire, pour tout $t \geq 0$,

$$M(t) = I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha + \beta)t)}{\alpha + \beta}G.$$

10. d) En conclure que, pour tout $t \geq 0$,

$$P(X_t = 1) = \exp(-(\alpha + \beta)t),$$

$$P(X_t = 2) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(1 - \exp(-(\alpha + \beta)t)), \quad P(X_t = 3) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}(1 - \exp(-(\alpha + \beta)t)).$$

10. e) En utilisant les résultats de la question 7, montrer que le temps aléatoire passé en recouvrement suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha + \beta$.

11. On distingue, pour l'accès au crédit d'une organisation, trois niveaux de solvabilité : 1, niveau C ; 2, niveau B ; 3, niveau A. On suppose que ce niveau évolue dans le

temps suivant un processus de Markov avec

$$G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ 4\alpha & 0 & -4\alpha \end{pmatrix}, \quad L_0 = (1 \ 0 \ 0), \quad \alpha > 0.$$

On note

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. a) On admet que

$$A^3 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^3 - 2A^2 + A$ en explicitant A^2 . Que peut-on dire du polynôme

$$U(x) = x^3 - 2x^2 + x?$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On admet qu'il existe un polynôme Q et des réels a, b, c tels que, pour tout réel x ,

$$\left(1 + \frac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c. \quad (*)$$

11. b) Déterminer une factorisation de $U(x)$ et en déduire que $c = 1$ et

$$\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k = a + b + c.$$

11. c) En dérivant la relation (*), montrer que $\theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a + b$. En déduire que

$$a = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1, \quad b = 2 \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2.$$

11. d) En conclure que, pour tout $t \geq 0$,

$$M(t) = (1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t})A^2 + ((2 + \alpha t)e^{-\alpha t} - 2)A + I_3,$$

puis préciser la loi de X_t .

Partie 4 — Démonstration de l'égalité (E) admise dans la partie 2

On utilise les notations et définitions des deux premières parties. Pour

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right),$$

c'est-à-dire la plus grande somme des valeurs absolues des coefficients d'une ligne. On admet que, pour une suite (A_k) et une matrice A , la convergence coefficient par coefficient $A_k \rightarrow A$ équivaut à $\|A_k - A\| \rightarrow 0$.

12. Un exemple. Si

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

montrer que $\|A\| = 2$.

13. Soit $t \geq 0$.

13. a) Établir que $\|M(t)\| = 1$.

13. b) En utilisant la question 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand,
 $\left\| I_n + \frac{t}{k} G \right\| = 1$.

14. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

14. a) Établir que $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

14. b) Montrer que

$$\|A\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

14. c) Démontrer que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, puis que, pour tout entier naturel p , $\|A^p\| \leq \|A\|^p$, avec la convention $u^0 = 1$, y compris si $u = 0$.

14. d) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{k+1} - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A - B)B^k$.

14. e) On pose $c = \max(\|A\|, \|B\|)$. Montrer par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k - B^k\| \leq kc^{k-1}\|A - B\|$, avec la même convention en exposant zéro.

15. Soit $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

15. a) Justifier que $\left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right) \right\| = o\left(\frac{1}{k}\right)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

15. b) Montrer que, pour tout k assez grand,

$$\left\| M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k \right\| \leq k \left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right) \right\|.$$

15. c) En conclure que $M(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$.