



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Mathématiques appliquées

2023

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 1 — Matrice génératrice et système différentiel associés

1. Les événements $[X_t = i]$, pour $1 \leq i \leq n$, sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω , par (H1). Ainsi $[X_{t+h} = j]$ est la réunion disjointe des $[X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]$. L'additivité finie donne

$$P(X_{t+h} = j) = \sum_{i=1}^n P([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]).$$

Cette écriture ne suppose pas que tous les événements $[X_t = i]$ aient une probabilité non nulle.

2. Puisque $t \in S_i$, la probabilité de $[X_t = i]$ est strictement positive. Les événements $[X_{t+h} = j]$ forment également un système complet, donc leurs probabilités sous $P_{[X_t=i]}$ ont pour somme 1. En appliquant (H4) aux termes $j \neq i$ et (H5) au terme $j = i$, puis en additionnant un nombre fini de restes $o(h)$, on obtient

$$1 = 1 + \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \right) h + o(h).$$

Pour $h > 0$, on soustrait 1 et on divise par h . À la limite en zéro,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} = 0.$$

Le choix de $t \in S_i$ est possible puisque f_i n'est pas identiquement nulle, par (H3). Chaque ligne de G a donc une somme nulle.

3. a) Fixons $t \geq 0$. Si $f_i(t) > 0$, la définition d'une probabilité conditionnelle et

(H4)-(H5) donnent

$$P([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) = f_i(t)(\delta_{i,j} + \alpha_{i,j}h + r_{i,j}(h)),$$

où $r_{i,j}(h) = o(h)$ et $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$, 0 sinon. Si $f_i(t) = 0$, la probabilité de cette intersection est nulle ; la même écriture avec un facteur $f_i(t) = 0$ est valable sans définir une probabilité conditionnelle sur un événement négligeable. En sommant selon la question 1,

$$f_j(t+h) = f_j(t) + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i,j}h + o(h))f_i(t).$$

3. b) Pour $h > 0$, l'égalité précédente implique

$$\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} = \sum_{i=1}^n f_i(t)\alpha_{i,j} + o(1),$$

car t est fixé et la somme des restes est finie. La dérivabilité de f_j , supposée dans (H3), permet de passer à la limite à droite :

$$f'_j(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)\alpha_{i,j}.$$

En zéro, c'est précisément la dérivée à droite ; pour $t > 0$, elle coïncide avec la dérivée usuelle.

3. c) Le coefficient de colonne j du produit de la ligne L_t par G est

$$\sum_{i=1}^n f_i(t)\alpha_{i,j} = f'_j(t).$$

Les coefficients des deux lignes sont égaux : $L'_t = L_t G$.

4. Comme f_i est dérivable, elle est continue sur $[0, T]$. De plus $0 \leq f_i \leq 1$. Une densité de U_T est $u \mapsto \frac{1}{T} \mathbf{1}_{[0, T]}(u)$. L'intégrale de $|f_i|/T$ sur ce segment est majorée par 1, donc le théorème de transfert s'applique et justifie l'existence de l'espérance :

$$e_i(T) = E(f_i(U_T)) = \frac{1}{T} \int_0^T f_i(t) dt.$$

5. a) La première colonne de G et la question 3 donnent $f_1' = -af_1 + bf_2$. Or $f_1 + f_2 = 1$, puisqu'il y a deux états. Ainsi $f_1' = -(a+b)f_1 + b$, soit $f_1' + (a+b)f_1 = b$.
5. b) La constante $p = b/(a+b)$ est une solution particulière. Les solutions de l'équation homogène $y' + (a+b)y = 0$ sont $t \mapsto Ce^{-(a+b)t}$. Donc $f_1(t) = p + Ce^{-(a+b)t}$. La condition initiale $f_1(0) = \alpha$ impose $C = \alpha - p$. Enfin $f_2 = 1 - f_1$, d'où

$$f_1(t) = p + (\alpha - p)e^{-(a+b)t}, \quad f_2(t) = q - (\alpha - p)e^{-(a+b)t}.$$

5. c) Pour $t \geq 0$, $u = e^{-(a+b)t}$ appartient à $]0, 1]$. L'écriture $f_1(t) = (1-u)p + u\alpha$ est une moyenne pondérée de p et α , à coefficients positifs ou nuls. Elle appartient donc à $[\min(p, \alpha), \max(p, \alpha)]$. Comme $a+b > 0$, $u \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et $f_1(t) \rightarrow p$. Ce résultat inclut $\alpha = p$, où f_1 est constante.

5. d) Méthode 1 — Intégration de la solution explicite

La question 4 puis la question 5.b donnent, pour $T > 0$,

$$e_1(T) = p + \frac{\alpha - p}{(a+b)T} (1 - e^{-(a+b)T}).$$

Le dernier terme est en valeur absolue au plus $|\alpha - p|/((a+b)T)$; il tend vers zéro. Ainsi

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} e_1(T) = p.$$

Méthode 2 — Moyenne d'une fonction convergente

Cette méthode n'utilise que la limite de f_1 , et reste utile lorsque sa primitive n'est pas

explicite. Soit $\varepsilon > 0$. D'après 5.c, il existe $A > 0$ tel que $|f_1(t) - p| \leq \varepsilon$ pour $t \geq A$. Pour $T \geq A$, la continuité sur $[0, A]$ donne une constante finie $K = \int_0^A |f_1(t) - p| dt$ et

$$|e_1(T) - p| \leq \frac{K}{T} + \frac{1}{T} \int_A^T \varepsilon dt \leq \frac{K}{T} + \varepsilon.$$

Pour T assez grand, $K/T \leq \varepsilon$. La différence est donc au plus 2ε , ce qui prouve de nouveau la limite p sans invoquer un théorème de moyenne supplémentaire.

6. a) Posons $v_1 = (1, 1, 1)^t$, $v_2 = (1, -2, 1)^t$ et $v_3 = (1, 0, -1)^t$. Par multiplication directe,

$$30Gv_1 = (0, 0, 0)^t, \quad 30Gv_2 = (-3, 6, -3)^t = -3v_2, \quad 30Gv_3 = (-5, 0, 5)^t = -5v_3.$$

Ces trois vecteurs sont non nuls ; ils prouvent que 0 , $-1/10$ et $-1/6$ sont des valeurs propres de G , sans calculer de déterminant.

6. b) Les colonnes de P sont v_1, v_2, v_3 . Elles sont libres, car ce sont des vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes. Puisqu'elles sont au nombre de trois dans $\mathbb{R}^3$, elles forment une base, et P est inversible. La question précédente donne

$$GP = P \operatorname{diag}(0, -1/10, -1/6).$$

En multipliant à droite par P^{-1} , on obtient la diagonalisation demandée :

$$G = \frac{1}{30} P \operatorname{diag}(0, -3, -5) P^{-1}.$$

6. c) Les produits des colonnes donnent

$${}^t P P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient de ligne 1, colonne 2 est $1 - 2 + 1 = 0$, et les coefficients diagonaux sont $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 4 + 1 = 6$, $1 + 0 + 1 = 2$. Ainsi

$$\text{diag}(1/3, 1/6, 1/2) {}^t P P = I_3.$$

Comme P est inversible, son inverse est

$$P^{-1} = \text{diag}(1/3, 1/6, 1/2) {}^t P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un calcul matriciel direct, sans résultat d'algèbre euclidienne à supposer connu.

6. d) La matrice G est symétrique. En transposant $L'_t = L_t G$, on obtient $C'_t = G C_t$. Pour $Y_t = P^{-1} C_t$, la dérivation se fait coefficient par coefficient, avec P^{-1} constante :

$$Y'_t = P^{-1} G C_t = P^{-1} G P Y_t = \text{diag}(0, -1/10, -1/6) Y_t.$$

On lit donc $y'_1 = 0$, $y'_2 = -y_2/10$ et $y'_3 = -y_3/6$.

6. e) La résolution des trois équations scalaires donne $y_1(t) = \alpha$, $y_2(t) = \beta e^{-t/10}$ et $y_3(t) = \gamma e^{-t/6}$, où $(\alpha, \beta, \gamma)^t = P^{-1} C_0$. Ainsi

$$C_t = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-t/10} \\ \gamma e^{-t/6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{-t/10} + \gamma e^{-t/6} \\ \alpha - 2\beta e^{-t/10} \\ \alpha + \beta e^{-t/10} - \gamma e^{-t/6} \end{pmatrix}.$$

La première ligne de P^{-1} donne $\alpha = (f_1(0) + f_2(0) + f_3(0))/3 = 1/3$. Les deux exponentielles tendent vers zéro ; chaque composante de C_t tend donc vers $1/3$. La loi limite est uniforme sur les trois états. Cette conclusion est établie pour cette matrice particulière.

7. a) Fixons $x > 0$. Pour k assez grand, l'intersection complète a une probabilité strictement positive par l'admission du sujet. Ses intersections initiales ont alors, elles aussi, une probabilité strictement positive. La formule des probabilités composées s'applique :

$$P\left(\bigcap_{j=0}^k [X_{jx/k} = i]\right) = P(X_0 = i) \prod_{j=0}^{k-1} P_{\bigcap_{\ell=0}^j [X_{\ell x/k} = i]}(X_{(j+1)x/k} = i).$$

Pour $j \geq 1$, la propriété (H2) remplace la condition sur tout le passé par $[X_{jx/k} = i]$; pour $j = 0$, cette condition est déjà la seule présente. L'homogénéité de (H5) rend tous les facteurs égaux à la même probabilité de rester dans l'état i pendant un pas x/k . Par (H5), cette probabilité est

$$1 + \alpha_{i,i} \frac{x}{k} + o(1/k) = 1 - \frac{\beta_i x}{k} + o(1/k).$$

Il s'agit bien du même reste dans les k facteurs, car la probabilité ne dépend pas de l'instant de départ. On obtient donc le produit et la puissance annoncés.

7. b) Écrivons $u_k = -\beta_i x/k + o(1/k)$. Alors $u_k \rightarrow 0$ et $ku_k \rightarrow -\beta_i x$. Pour k assez grand, $1 + u_k > 0$. Le développement à l'ordre 1 du logarithme donne

$$k \ln(1 + u_k) = ku_k + k o(u_k) \rightarrow -\beta_i x,$$

car $u_k = O(1/k)$ implique $k o(u_k) \rightarrow 0$. Par continuité de l'exponentielle, $(1 + u_k)^k \rightarrow e^{-\beta_i x}$. Avec l'admission du sujet et 7.a,

$$P(Y_i > x) = P(X_0 = i) e^{-\beta_i x} \quad (x > 0).$$

L'événement $[Y_i > x]$ est inclus dans $[X_0 = i]$, puisque $Y_i = 0$ si $X_0 \neq i$. La division par $P(X_0 = i) > 0$ donne la formule conditionnelle pour $x > 0$. Pour $x = 0$, sous $[X_0 = i]$, on a $Y_i = Y > 0$, donc la formule reste vraie. Enfin $\beta_i > 0$: elle est positive ou nulle par (H5), et non nulle par l'hypothèse de la question. La fonction de répartition conditionnelle de Y_i est ainsi 0 pour $x < 0$ et $1 - e^{-\beta_i x}$ pour $x \geq 0$. Sous $P_{[X_0=i]}$, Y_i suit la loi exponentielle de paramètre β_i .

7. c) Sur $[X_0 = k]$, les variables Y et Y_k sont égales. Pour les seuls indices k tels que $P(X_0 = k) > 0$, 7.b s'applique. La décomposition par le système complet $([X_0 = k])$ donne, pour $x \geq 0$,

$$P(Y > x) = \sum_{k \in I} P(X_0 = k) P_{[X_0 = k]}(Y_k > x) = \sum_{k \in I} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x}.$$

Les indices hors de I ajoutent des termes nuls, ce qui donne exactement la somme de 1 à n demandée. Aucune probabilité conditionnelle sur un événement de probabilité nulle n'est utilisée.

7. d) Posons $p_k = P(X_0 = k)$. La fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \sum_{k \in I} p_k e^{-\beta_k x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Comme

$$\sum_{k \in I} p_k = 1,$$

elle est continue en zéro, et elle est de classe C^1 de chaque côté de zéro. Une densité est donc

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \sum_{k \in I} p_k \beta_k e^{-\beta_k x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Elle est positive, a des limites finies de part et d'autre de zéro, et son intégrale vaut

$$\sum_{k \in I} p_k = 1.$$

La valeur choisie en zéro n'a pas d'effet sur la loi.

7. e) La variable Y est positive. Pour chaque $k \in I$, $\beta_k > 0$, et une intégration par parties sur $[0, B]$ donne

$$\int_0^B x \beta_k e^{-\beta_k x} dx = -B e^{-\beta_k B} + \frac{1 - e^{-\beta_k B}}{\beta_k}.$$

Lorsque $B \rightarrow +\infty$, $B e^{-\beta_k B} \rightarrow 0$ par croissance comparée, et cette intégrale tend vers $1/\beta_k$. La somme comporte un nombre fini de termes :

$$\int_0^{+\infty} x g(x) dx = \sum_{k \in I} p_k / \beta_k < +\infty.$$

Elle est absolument convergente puisque son intégrande est positif. Par conséquent,

$$E(Y) = \sum_{k \in I} \frac{P(X_0 = k)}{\beta_k}.$$

Partie 2 — Matrice de transition, lien avec la matrice génératrice

8. a) Pour un indice i tel que $P(X_0 = i) > 0$, $P([X_0 = i] \cap [X_s = j]) = P(X_0 = i) m_{i,j}(s)$. Si $P(X_0 = i) = 0$, les deux côtés sont nuls, et $m_{i,j}(s)$ reste défini à l'aide d'un autre instant de S_i , non vide par (H3). La question 1 à $t = 0$ donne donc

$$f_j(s) = \sum_{i=1}^n f_i(0) m_{i,j}(s).$$

C'est, coefficient par coefficient, l'égalité $L_s = L_0 M(s)$. Le même raisonnement à un instant quelconque donne également $L_{r+s} = L_r M(s)$.

8. b) Supposons d'abord $s > 0$ et posons $B = [X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]$. Si $P(B) > 0$, (H2)

et la définition de M donnent

$$P(B \cap [X_{r+s+t} = j]) = P(B)m_{k,j}(t) = P(X_r = i)m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).$$

La condition $P(B) > 0$ assure $r + s \in S_k$, donc la probabilité conditionnelle utilisée existe. Si $P(B) = 0$, le membre de gauche vaut zéro. Puisque $r \in S_i$, $P(B) = P(X_r = i)m_{i,k}(s)$, donc $m_{i,k}(s) = 0$ et le membre de droite est également nul. Pour $s = 0$, la définition donne $m_{i,k}(0) = \delta_{i,k}$; l'égalité se vérifie directement. La valeur $t = 0$ est aussi couverte puisque $m_{k,j}(0) = \delta_{k,j}$.

On somme ensuite sur k , les événements $[X_{r+s} = k]$ formant un système complet. Il vient

$$P([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = P(X_r = i) \sum_{k=1}^n m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).$$

8. c) Le membre de gauche de la dernière égalité est $P(X_r = i)m_{i,j}(s+t)$. Comme $P(X_r = i) > 0$, on peut diviser par ce nombre :

$$m_{i,j}(s+t) = \sum_{k=1}^n m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).$$

Chaque S_i est non vide, donc on peut choisir un tel r pour chaque ligne i . L'égalité vaut pour toutes les lignes et toutes les colonnes : $M(s+t) = M(s)M(t)$, y compris si $s = 0$ ou $t = 0$, puisque $M(0) = I_n$.

8. d) Pour $k = 1$, l'égalité est immédiate. Si $M(kt) = M(t)^k$, alors 8.c donne $M((k+1)t) = M(kt)M(t) = M(t)^{k+1}$. La récurrence prouve $M(kt) = M(t)^k$ pour tout $k \geq 1$. Pour $t = 0$, les deux membres valent I_n .

9. a) Question adaptée au programme actuel : on utilise l'approximation particulière admise du sujet; aucune méthode générale de discrétisation d'équation différentielle n'est exigée. La condition de positivité ajoutée garantit que la matrice

utilisée est une matrice de transition. En effet, ses lignes ont une somme égale à 1 par la question 2 ; une puissance d'une matrice à coefficients positifs ou nuls et à sommes de lignes égales à 1 conserve ces deux propriétés.

Python

```
import numpy as np

import numpy.linalg as al

def transition(t, G):
    n = np.shape(G)[0]
    return al.matrix_power(np.eye(n) + t * G / 1000, 1000)
```

Le nombre n est lu dans la forme du tableau. L'opération `matrix_power` calcule une puissance matricielle, et non des puissances terme à terme. Le résultat est une approximation de $M(t)$; la limite admise ne fournit pas à elle seule une majoration de l'erreur pour l'entier 1000.

9. b) Question adaptée au programme actuel : les courbes calculées sont explicitement des approximations des probabilités, et les commandes utiles sont documentées dans le sujet.

Python

```
import numpy as np

import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt

def transition(t, G):
    n = np.shape(G)[0]
    return al.matrix_power(np.eye(n) + t * G / 1000, 1000)

def traceLoi2Xt(G, L0, tmax):
    n = np.shape(G)[0]
    temps = np.linspace(0, tmax, 1000)
    lois = np.zeros((1000, n))
    for r in range(1000):
```

```

lois[r, :] = np.dot(L0, transition(temps[r], G))

for j in range(n):
    plt.plot(temps, lois[:, j])

plt.show()

```

La ligne d'indice r du tableau `lois` contient les n probabilités approchées au temps `temps[r]`. L'indice Python j correspond à l'état $j + 1$. Chaque colonne est tracée en fonction des mêmes 1000 temps. Cette construction emploie $L_t = L_0 M(t)$ établi en 8.a.

9. c) Les trois probabilités initiales sont 0,5, 0,3 et 0,2. La figure représente des courbes se rapprochant toutes de $1/3 \simeq 0,333$. C'est cohérent avec la question 6.e, qui établit cette limite pour toute loi initiale dans le cas considéré.

Plus précisément, avec la loi initiale indiquée, 6.c donne $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/60$ et $\gamma = 3/20$. Les probabilités exactes sont donc

$$f_1(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{60}e^{-t/10} + \frac{3}{20}e^{-t/6},$$

$$f_2(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}e^{-t/10}, \quad f_3(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{60}e^{-t/10} - \frac{3}{20}e^{-t/6}.$$

Le premier terme part de 0,5, le deuxième de 0,3 et le troisième de 0,2. Le tracé numérique illustre leur comportement, tandis que la preuve de la limite est celle de 6.e.

9. d) Question adaptée au programme actuel : les transitions sont celles de la matrice approchée, et une garde contre les dépassements d'indice par arrondi est conservée dans le code complété.

Python

```

import numpy as np

import numpy.random as rd

import numpy.linalg as al

import matplotlib.pyplot as plt

def transition(t, G):

```

```

n = np.shape(G)[0]

return al.matrix_power(np.eye(n) + t * G / 1000, 1000)

def simulX(t, k, L0, G):
    listeDesT = []
    listeDesX = []
    Mt = transition(t, G)
    Lt = L0
    for i in range(k + 1):
        listeDesT.append(i * t)
        p = rd.random()
        s = Lt[0]
        j = 0
        while p > s and j < len(Lt) - 1:
            j += 1
            s += Lt[j]
        Lt = Mt[j, :]
        listeDesX.append(j + 1)
    plt.plot(listeDesT, listeDesX)
    plt.show()

```

Avant le premier tirage, L_t est la loi initiale. Les sommes cumulées s découpent $[0, 1[$ en intervalles dont les longueurs sont les probabilités de L_t ; le tirage uniforme choisit ainsi l'état $j + 1$ avec la probabilité voulue. Après observation de cet état, la ligne $M_t[j, :]$ est la loi conditionnelle de l'état suivant. On doit prendre cette ligne plutôt que multiplier L_t par M_t , car on simule une trajectoire dépendant de l'état observé. Les listes contiennent $k + 1$ temps et états, de 0 à kt .

Les parties numériques des fonctions des questions 9.a, 9.b et 9.d ont été exécutées avec la matrice et la loi initiale de 9.c. Les tableaux de transition ont des coefficients positifs ou nuls et des lignes de somme 1 à l'arrondi numérique près ; les valeurs simulées appartiennent à $\{1, 2, 3\}$. Les appels d'affichage Matplotlib ont été relus, sans être exécutés, cette bibliothèque n'étant pas disponible. Les vérifications numériques ne remplacent pas les démonstrations probabilistes.

Partie 3 — Deux exemples de modélisations

10. a) Posons $s = \alpha + \beta > 0$. La seule ligne éventuellement non nulle de G est la première. Pour calculer G^2 , cette ligne multiplie les lignes de G avec les coefficients $-s$, α et β . Les deux dernières lignes étant nulles, $G^2 = -sG$. Pour $i = 1$, $G^1 = (-s)^0 G$. Si $G^i = (-s)^{i-1} G$, alors $G^{i+1} = (-s)^{i-1} G^2 = (-s)^i G$. Par récurrence, $G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1} G \quad (i \geq 1)$.

10. b) Les matrices I_3 et $(t/k)G$ commutent. Le binôme matriciel peut donc être appliqué :

$$\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i.$$

En remplaçant G^i par son expression de 10.a et en factorisant G , on obtient

$$\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-s)^{i-1}\right) G.$$

10. c) Comme $s > 0$, on peut écrire $(-s)^{i-1} = (-s)^i / (-s)$. Le binôme scalaire donne donc

$$\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-s)^{i-1} = -\frac{1}{s} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(-\frac{st}{k}\right)^i - 1\right) = \frac{1 - (1 - st/k)^k}{s}.$$

Pour $t = 0$, $(1 - st/k)^k = 1 = e^{-st}$. Si $t > 0$, la base $1 - st/k$ est strictement positive pour $k > st$, et

$$k \ln(1 - st/k) = -st + o(1),$$

par le développement du logarithme à l'ordre 1. La continuité de l'exponentielle donne

$(1 - st/k)^k \rightarrow e^{-st}$. En passant à la limite coefficient par coefficient dans 10.b, à l'aide de l'égalité admise (E), on conclut

$$M(t) = I_3 + \frac{1 - e^{-st}}{s} G \quad (t \geq 0).$$

10. d) Méthode 1 — Première ligne de la matrice de transition

La loi initiale est $L_0 = (1 \ 0 \ 0)$, donc $L_t = L_0 M(t)$ est la première ligne de $M(t)$. Par 10.c,

$$L_t = \left(1 - s \frac{1 - e^{-st}}{s}, \alpha \frac{1 - e^{-st}}{s}, \beta \frac{1 - e^{-st}}{s} \right).$$

Ainsi

$$f_1(t) = e^{-st}, \quad f_2(t) = \frac{\alpha}{s}(1 - e^{-st}), \quad f_3(t) = \frac{\beta}{s}(1 - e^{-st}).$$

Les trois nombres sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1, y compris à $t = 0$.

Méthode 2 — Résolution du système différentiel triangulaire

Cette méthode exploite directement la circulation entre les états et permet de retrouver la loi sans calcul de puissances. La relation $L'_t = L_t G$ donne $f'_1 = -sf_1$, $f'_2 = \alpha f_1$ et $f'_3 = \beta f_1$. Les conditions initiales sont $f_1(0) = 1$, $f_2(0) = f_3(0) = 0$. La première équation donne $f_1(t) = e^{-st}$. En intégrant les deux autres sur $[0, t]$,

$$f_2(t) = \alpha \int_0^t e^{-su} du = \frac{\alpha}{s}(1 - e^{-st}), \quad f_3(t) = \beta \int_0^t e^{-su} du = \frac{\beta}{s}(1 - e^{-st}).$$

On retrouve les trois probabilités, avec une interprétation directe des flux vers les états absorbants 2 et 3.

10. e) Au temps initial, l'état est 1 avec probabilité 1. Le temps initial passé dans cet état est donc le temps de recouvrement demandé. Ici $\beta_1 = -\alpha_{1,1} = \alpha + \beta = s > 0$. La

question 7.b donne, pour tout $x \geq 0$, $P(Y > x) = e^{-sx}$. Le temps de recouvrement suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha + \beta$. Les valeurs $\beta_2 = \beta_3 = 0$ ne posent pas de difficulté : les états 2 et 3 ont une probabilité initiale nulle, de sorte que l'hypothèse de 7 porte seulement sur l'état 1.

11. a) Le produit matriciel donne

$$A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour la matrice $3A$, la première ligne du carré est $(1, -2, 1)$; la deuxième est $(4, 1, -5)$; la troisième est $(-20, 4, 16)$. En mettant A^3 , $2A^2$ et A au même dénominateur 27, on obtient

$$27(A^3 - 2A^2 + A) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi $U(A) = A^3 - 2A^2 + A = 0$: U est un polynôme annulateur de A . On n'utilise ici que cette identité concrète.

11. b) On factorise $U(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$. En prenant $x = 0$ dans l'identité (*), le terme $Q(0)U(0)$ est nul et le membre de gauche vaut 1 : $c = 1$. En prenant $x = 1$, $U(1) = 0$, d'où

$$\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k = a + b + c.$$

11. c) Les deux membres de (*) sont des polynômes en x . On les dérive :

$$\theta \left(1 + \frac{\theta}{k}x\right)^{k-1} = Q'(x)U(x) + Q(x)U'(x) + 2ax + b.$$

Comme $U(1) = 0$ et $U'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ donne $U'(1) = 0$, l'évaluation en 1 donne $\theta(1 + \theta/k)^{k-1} = 2a + b$. Pour $k = 1$, le facteur de puissance zéro est le polynôme constant 1, même si sa base vaut zéro.

Posons $u = (1 + \theta/k)^k$ et $v = \theta(1 + \theta/k)^{k-1}$. Les deux équations sont $a + b = u - 1$ et $2a + b = v$. En les soustrayant, $a = v - u + 1$; puis $b = u - 1 - a = 2u - v - 2$. Donc

$$a = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1,$$

$$b = 2 \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2.$$

11. d) On a $G = -\alpha A$. Dans (*), remplaçons θ par $-\alpha t$ et évaluons l'identité polynomiale en la matrice A . Les produits de polynômes en A suivent la multiplication des puissances de A ; comme $U(A) = 0$, le terme $Q(A)U(A)$ est nul. Pour chaque k ,

$$\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = a_k A^2 + b_k A + I_3.$$

Si $z = \alpha t \geq 0$, les calculs logarithmiques de 10.c donnent $(1 - z/k)^k \rightarrow e^{-z}$. Pour k assez grand, la base est non nulle, et $(1 - z/k)^{k-1} = (1 - z/k)^k / (1 - z/k) \rightarrow e^{-z}$. Pour $z = 0$, les mêmes limites sont immédiates. Les coefficients convergent donc vers

$$a_k \rightarrow 1 - (1 + z)e^{-z}, \quad b_k \rightarrow (2 + z)e^{-z} - 2.$$

Grâce à (E),

$$M(t) = (1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t})A^2 + ((2 + \alpha t)e^{-\alpha t} - 2)A + I_3.$$

La loi $L_t = L_0 M(t)$ est la première ligne. Les premières lignes de A et de A^2 sont

respectivement $(1/3, -1/3, 0)$ et $(1/9, -2/9, 1/9)$. On obtient, avec $z = \alpha t$,

$$P(X_t = 1) = 1 + \frac{1 - (1+z)e^{-z}}{9} + \frac{(2+z)e^{-z} - 2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{5+2z}{9}e^{-z},$$

$$P(X_t = 2) = -\frac{2(1 - (1+z)e^{-z})}{9} - \frac{(2+z)e^{-z} - 2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{4+z}{9}e^{-z},$$

$$P(X_t = 3) = \frac{1 - (1+z)e^{-z}}{9}.$$

La somme vaut 1. La première probabilité est positive. Pour la deuxième,

$h(z) = (4+z)e^{-z}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ car $h'(z) = -(3+z)e^{-z} < 0$; donc

$h(z) \leq 4$. Pour la troisième, $(1+z)e^{-z} \leq 1$ puisque sa dérivée est $-ze^{-z} \leq 0$. Toutes les probabilités sont ainsi positives ou nulles. À $t = 0$, elles valent $(1, 0, 0)$; à l'infini, elles tendent vers $(4/9, 4/9, 1/9)$.

Partie 4 — Démonstration de l'égalité (E)

12. Les sommes des valeurs absolues des coefficients des trois lignes sont respectivement $(1 + 1 + 1)/3 = 1$, $(0 + 1 + 1)/3 = 2/3$ et $(4 + 0 + 2)/3 = 2$. Leur maximum est 2, donc $\|A\| = 2$.

13. a) Pour chaque ligne i , on choisit un instant dans S_i , possible par (H3). Les $m_{i,j}(t)$ sont alors les probabilités conditionnelles d'un système complet : ils sont positifs ou nuls et

$$\sum_j m_{i,j}(t) = 1.$$

Ainsi

$$\sum_j |m_{i,j}(t)| = 1$$

pour chaque ligne, donc $\|M(t)\| = 1$.

- 13.** b) Hors de la diagonale, les coefficients de $I_n + (t/k)G$ sont $(t/k)\alpha_{i,j} \geq 0$. Sur la diagonale, ils valent $1 + (t/k)\alpha_{i,i} = 1 - t\beta_i/k$. Pour $k \geq \max_i(t\beta_i)$, tous ces coefficients sont positifs ou nuls. Par la question 2, chaque ligne a une somme

$$1 + (t/k) \sum_j \alpha_{i,j} = 1.$$

Les valeurs absolues ne changent donc pas les coefficients et $\|I_n + (t/k)G\| = 1$ pour k assez grand. Si $t = 0$, cela vaut pour tout k .

- 14.** a) Pour chaque ligne i , l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ donne

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|.$$

La borne de droite étant indépendante de i , le maximum des membres de gauche lui est inférieur ou égal. Ainsi $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

- 14.** b) Les termes $|a_{i,j}|$ sont tous positifs ou nuls. Chaque somme de ligne

$$\sum_j |a_{i,j}|$$

est donc inférieure ou égale à la somme de toutes les lignes

$$\sum_i \sum_j |a_{i,j}|.$$

Il en est de même de leur maximum :

$$\|A\| \leq \sum_i \sum_j |a_{i,j}|.$$

14. c) Le coefficient de ligne i , colonne j de AB vaut

$$\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} b_{\ell,j}.$$

Pour chaque i ,

$$\sum_{j=1}^n |(AB)_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n |a_{i,\ell}| |b_{\ell,j}| = \sum_{\ell=1}^n |a_{i,\ell}| \sum_{j=1}^n |b_{\ell,j}| \leq \|B\| \sum_{\ell=1}^n |a_{i,\ell}| \leq \|A\| \|B\|.$$

Les sommes sont finies, donc leur permutation est licite. En prenant le maximum sur i , $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Pour $p = 0$, $\|A^0\| = \|I_n\| = 1 = \|A\|^0$, avec la convention du sujet. Si l'inégalité est vraie au rang p , alors $\|A^{p+1}\| \leq \|A^p\| \|A\| \leq \|A\|^{p+1}$. La récurrence prouve $\|A^p\| \leq \|A\|^p$ pour tout entier naturel p .

14. d) En développant le membre de droite dans l'ordre indiqué, sans permuter A et B ,

$$A(A^k - B^k) + (A - B)B^k = A^{k+1} - AB^k + AB^k - B^{k+1} = A^{k+1} - B^{k+1}.$$

L'identité est valable sans hypothèse de commutation.

14. e) Méthode 1 — Récurrence demandée

Pour $k = 1$, l'inégalité est l'égalité $\|A - B\| \leq \|A - B\|$. Si $c = 0$, les sommes de valeurs absolues des lignes de A et B sont nulles : $A = B = 0$, et l'énoncé est vérifié pour tout k . Supposons donc $c > 0$. Si l'inégalité vaut au rang k , les questions 14.a, 14.c et 14.d donnent

$$\begin{aligned} \|A^{k+1} - B^{k+1}\| &\leq \|A\| \|A^k - B^k\| + \|A - B\| \|B^k\| \leq c k c^{k-1} \|A - B\| + c^k \|A - B\| \\ &= (k+1) c^k \|A - B\|. \end{aligned}$$

La récurrence conclut $\|A^k - B^k\| \leq k c^{k-1} \|A - B\|$ pour tout $k \geq 1$.

Méthode 2 — Somme télescopique matricielle

Cette méthode rend visible l'origine du facteur k et fournit une identité utile pour comparer des puissances. Pour $k \geq 1$,

$$\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r} (A - B) B^r = \sum_{r=0}^{k-1} (A^{k-r} B^r - A^{k-1-r} B^{r+1}) = A^k - B^k.$$

Les termes successifs se compensent sans qu'il soit nécessaire de commuter A et B . Si $c > 0$, la norme de chaque terme est, d'après 14.c, au plus $c^{k-1-r} \|A - B\| c^r = c^{k-1} \|A - B\|$. La somme contient k termes, d'où l'inégalité. Le cas $c = 0$ est traité comme dans la première méthode.

15. a) Si $t = 0$, $M(0) = I_n$ et la différence est identiquement nulle. Supposons $t > 0$. D'après (H4)-(H5) et la définition de M , chaque coefficient s'écrit

$$m_{i,j}(h) = \delta_{i,j} + \alpha_{i,j} h + r_{i,j}(h), \quad r_{i,j}(h) = o(h) \quad (h \rightarrow 0^+).$$

À $h = t/k$, chaque $r_{i,j}(t/k) = o(1/k)$, car t est fixé. Grâce à 14.b,

$$0 \leq \left\| M(t/k) - \left(I_n + \frac{t}{k} G \right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r_{i,j}(t/k)| = o(1/k).$$

La dernière égalité utilise seulement une somme finie de restes. L'encadrement donne la conclusion voulue.

15. b) Appliquons 14.e aux matrices $A = M(t/k)$ et $B = I_n + (t/k)G$. Pour k assez grand, 13.a et 13.b donnent $\|A\| = \|B\| = 1$, donc $c = 1$. L'inégalité devient exactement

$$\left\| M(t/k)^k - \left(I_n + \frac{t}{k} G \right)^k \right\| \leq k \left\| M(t/k) - \left(I_n + \frac{t}{k} G \right) \right\|.$$

15. c) Par 8.d, $M(t/k)^k = M(t)$ pour tout $k \geq 1$. La question 15.a montre que le membre de droite de 15.b tend vers zéro. Ainsi

$$\left\| M(t) - \left(I_n + \frac{t}{k} G \right)^k \right\| \rightarrow 0.$$

L'équivalence admise entre convergence pour cette quantité et convergence coefficient par coefficient permet de conclure

$$M(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k} G \right)^k.$$

Cette dernière partie démontre l'égalité (E) à partir des propriétés (H1)-(H5) et des résultats des questions 1, 2, 8 et 12 à 15; elle ne réutilise pas l'égalité admise dans les parties 2 et 3.

Relevé des adaptations

- Préambule (H3) et questions 3.b, 6.d : précision de la dérivée à droite en zéro, pour expliciter la convention à l'extrémité de $\mathbb{R}^+$ sans changer les équations.
- Préambule (H5) : « négatif ou nul » explicite le sens large nécessaire aux états absorbants de la question 10.
- Question 9 : l'égalité numérique du document source est écrite comme une approximation admise ; aucune méthode générale de discrétisation différentielle n'est supposée connue. La condition de positivité de $I_n + tG/1000$ est explicitée pour que les puissances utilisées puissent représenter des transitions. La limite (E) ne garantit pas cette positivité pour un entier fixé et une matrice G quelconque.
- Questions 9.a, 9.b et 9.d : documentation des commandes NumPy et Matplotlib utiles ; la condition d'arrêt de la recherche d'un état est protégée contre un dépassement d'indice lié aux arrondis, en conservant les trois blancs à compléter.
- Question 9.c : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original ; les valeurs des courbes sont calculées directement avec le code et les paramètres de l'énoncé, plus précis que des valeurs mesurées. Les axes, graduations, cadre et trois courbes sont conservés.
- Question 14.c et 14.e : convention sur la puissance d'exposant zéro explicitée pour couvrir les matrices nulles.