



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2021

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Une des situations les plus fréquentes dans l'entretien d'un site concerne la gestion des équipements, notamment la prévision du remplacement d'éléments défectueux. Imaginons qu'un local soit éclairé par une ampoule. Celle-ci a une durée de vie aléatoire ; quand elle tombe en panne, elle est immédiatement remplacée par une nouvelle ampoule et ainsi de suite. Une bonne gestion nécessite de connaître le comportement des pannes successives, notamment leur comportement en moyenne, pour prévoir un stock d'ampoules de rechange. Une telle situation s'appelle un processus de renouvellement. Le but du problème est l'étude d'un modèle probabiliste le décrivant. Dans la première partie, on examine le comportement asymptotique des temps de panne. Dans la deuxième, on étudie quelques propriétés de base du processus. La troisième est consacrée au comportement asymptotique du nombre de pannes moyen.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour toute variable aléatoire Y , on note $E(Y)$ son espérance et $V(Y)$ sa variance lorsqu'elles existent. On admet que, si Y, Z sont positives, $Y \leq Z$ et $E(Z)$ existe, alors $E(Y)$ existe et $E(Y) \leq E(Z)$.

Pour tout le problème, on se donne une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles positives, indépendantes et de même loi. On note $F(t) = P(X_1 \leq t)$ pour tout réel t . On suppose $F(0) = P(X_1 = 0) < 1$ et on suppose que X_1 admet un moment d'ordre 4, $E(X_1^4)$. On pose $S_0 = 0$ et

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

pour $n \geq 1$.

Première partie : Comportement asymptotique des temps de panne

1. a) i) Soit r un entier naturel tel que $1 \leq r \leq 4$. Montrer que $X_1^r \leq 1 + X_1^4$.

1. a) ii) Montrer que, pour tout $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, X_1^r admet une espérance.

On notera tout au long du problème $\mu = E(X_1)$.

1. a) iii) Montrer que $\mu > 0$.

1. a) iv) Montrer que $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4.

2. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements telle que

$$\sum_{n \geq 1} P(A_n)$$

converge. On pose $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ pour $n \geq 1$.

2. a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $B_n \supset B_{n+1}$. On pose $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

2. b) Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes : (A) $\omega \in B$; (B) ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k .

2. c) Montrer que $P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$.

2. d) Montrer que, si C, D sont deux événements, $P(C \cup D) \leq P(C) + P(D)$.

2. e) Montrer que

$$P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

2. f) Dédire que $P(B) = 0$.

3. Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, centrées et de même loi. On suppose que Y_1 admet un moment d'ordre 4 et on note

$V(Y_1) = E(Y_1^2) = \sigma^2$ et $E(Y_1^4) = \rho^4$. On pose

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n Y_k$$

pour $n \geq 1$.

3. a) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$.

3. b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

3. b) i) Montrer que $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right)$.

3. b) ii) Montrer que $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)$.

3. b) iii) Montrer que

$$(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^n Y_k^4 + 3 \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_k^2 Y_j^2 + \sum_{k=1}^n Y_k W_k,$$

où W_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \dots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \dots, Y_n$; on ne cherchera pas à expliciter cette variable.

3. b) iv) Montrer que $E((\Sigma_n)^4) = n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4$.

3. b) v) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leq \frac{C}{n^2}.$$

3. b) vi) Montrer que $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right) \leq \frac{C}{n^{3/2}}$.
4. On définit, pour $n \geq 1$, l'événement $A_n = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right]$.
 4. a) Montrer que la série de terme général $P(A_n)$ est convergente.
 4. b) En déduire que la probabilité que A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle.
 4. c) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ a pour probabilité 1.
 4. d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.
5. a) Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, $(S_n(\omega))_{n \geq 0}$ est croissante. On considère $S_\infty(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega)$, avec $S_\infty(\omega) = +\infty$ si cette suite diverge.
5. b) Montrer que, si $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.
5. c) En déduire que $P(S_\infty = +\infty) = 1$.

Deuxième partie : Le processus de renouvellement

On a montré qu'avec probabilité 1, $(S_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$. On note Ω_0 cet événement. Pour les deux parties suivantes, on choisit Ω_0 comme univers, muni de la probabilité obtenue par restriction ; cela ne change aucune des lois des variables considérées. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega_0$, $S_n(\omega) \rightarrow +\infty$.

On définit, pour tout réel $t \geq 0$, $N_t = \max\{k \in \mathbb{N} : S_k \leq t\}$. C'est le processus de renouvellement associé à $(X_n)_{n \geq 1}$.

6. a) Soient s, t tels que $0 \leq s \leq t$. Montrer que $N_s \leq N_t$.

6. b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'égalité d'événements $[N_t \geq n] = [S_n \leq t]$.
6. c) Pour $\omega \in \Omega_0$ donné, montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} N_t(\omega)$ existe, éventuellement infinie. On note $N_\infty(\omega)$ cette limite.
6. d) Soient $\omega \in \Omega_0$ et $K \in \mathbb{N}$. On suppose $N_\infty(\omega) = K$.
6. d) i) Montrer qu'il existe $T_\omega > 0$ tel que, pour tout $t \geq T_\omega$, $N_t(\omega) = K$.
6. d) ii) Montrer qu'alors $S_K(\omega) \leq T_\omega$ et $S_{K+1}(\omega) > t$ pour tout $t \geq T_\omega$.
6. d) iii) En déduire que, si $N_\infty(\omega) = K$, alors nécessairement $X_{K+1}(\omega) > t$ pour tout réel positif t , ce qui est absurde.
6. d) iv) Conclure que $P(N_\infty = +\infty) = 1$.
7. On souhaite écrire une fonction Python simulant N_t . On suppose que la fonction $X()$ renvoie une réalisation de la loi de X_1 , indépendante des réalisations précédentes. Compléter la fonction suivante, qui prend en argument un réel $t \geq 0$ et renvoie une réalisation de N_t :

Python

```
def renouvellement(t):
    N = 0
    S = 0
    while ...:
        ...
    return ...
```

8. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,
- $$P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n + 1).$$

8. b) Pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier naturel n , on note $F_n(t) = P(S_n \leq t)$.

8. b) i) Déterminer F_0 et F_1 .

8. b) ii) Montrer que $P(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$.

9. Soient U, V, U', V' quatre variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U et U' suivent la même loi et que, pour tous entiers naturels k, j tels que $P(U = k) \neq 0$,

$$P_{[U=k]}(V = j) = P_{[U'=k]}(V' = j).$$

Montrer que V et V' suivent la même loi.

10. Soit $p \in]0, 1[$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p . On note $W = \min\{k \geq 1 : Z_k = 1\}$. Les temps d'attente sont considérés sur l'événement de probabilité 1 où les succès sont en nombre infini.

10. a) Montrer que, pour tout entier $i \geq 1$, $P(W = i) = p(1 - p)^{i-1}$.

10. b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$W_n = \min\{k \geq 1 : \sum_{i=1}^k Z_i = n\}.$$

10. b) i) Montrer que, pour tout $k \geq n$, $P(W_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1 - p)^{k-n}$.

10. b) ii) Montrer que, pour tous $k \geq n$ et $j \geq k + 1$, $P_{[W_n=k]}(W_{n+1} = j) = p(1 - p)^{j-k-1}$.

10. c) On suppose que, pour tout entier $i \geq 1$, $P(X_1 = i) = p(1 - p)^{i-1}$.

10. c) i) Montrer que, pour tous entiers j, k tels que $k \geq n$ et $j \geq k + 1$,

$$P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = j) = p(1 - p)^{j-k-1}.$$

10. c) ii) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, S_n a la même loi que W_n .

10. d) Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$,

$$P(N_t = n) = \sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1},$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à t . Par convention, une somme dont la borne inférieure est supérieure à la borne supérieure est nulle.

Troisième partie : Théorème du renouvellement

Le but de cette partie est d'obtenir des propriétés asymptotiques, en moyenne, du processus de renouvellement.

11. a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$.

11. b) En déduire que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe $T_\omega > 0$ tel que, pour tout réel $t \geq T_\omega$,

$$\frac{S_{N_t}(\omega)}{N_t(\omega)} \leq \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)}.$$

11. c) Montrer que l'événement $\left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu \right]$ a pour probabilité 1.

11. d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu \right]$ a pour probabilité 1.

11. e) En déduire que l'événement $\left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu} \right]$ a pour probabilité 1.

On cherche maintenant à montrer que ce résultat s'étend en moyenne :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E \left(\frac{N_t}{t} \right) = \frac{1}{\mu}.$$

12. On examine un contre-exemple montrant que le résultat ne se déduit pas automatiquement de la question précédente. Soit U une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $Y_n = 0$ si $U > 1/n$ et $Y_n = n$ si $U \leq 1/n$, avec la convention $Y_n(\omega) = 0$ lorsque $U(\omega) = 0$.

12. a) Soit $\omega \in \Omega_0$. Montrer qu'il existe $N_\omega \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_\omega$, $Y_n(\omega) = 0$.

12. b) En déduire que l'événement $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0 \right]$ a pour probabilité 1.

12. c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $E(Y_n) = 1$. On n'a donc pas $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = E(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n)$.

13. Soit J une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note

$$S_J = \sum_{k=1}^J X_k.$$

13. a) Montrer que

$$S_J = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbf{1}_{[J \geq k]},$$

où $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$.

On suppose désormais que, pour tout entier $n \geq 0$, $\mathbf{1}_{[J \leq n]}$ est indépendante des variables $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$. On admet que, pour une suite $(W_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires positives, on peut calculer l'espérance de la somme par la somme des espérances; en particulier, si

$$\sum_{n \geq 1} E(W_n)$$

est finie, alors

$$\sum_{n \geq 1} W_n$$

admet une espérance égale à cette somme.

13. b) Montrer que X_k et $\mathbf{1}_{[J \geq k]}$ sont indépendantes.

13. c) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

13. c) i) Montrer que

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[U \geq n]}.$$

13. c) ii) Montrer que U admet une espérance si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geq n)$$

converge, et qu'alors

$$E(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geq n).$$

13. d) On suppose que J admet une espérance. Montrer que S_J admet une espérance et que $E(S_J) = E(X_1)E(J) = \mu E(J)$.

14. a) Soient un réel $t > 0$ et un entier $n \geq 0$. On pose $J = N_t + 1$. Montrer que $\mathbf{1}_{[J \leq n]}$ est indépendante de $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$

14. b) Justifier que N_t admet une espérance, puis déduire que $E(S_{N_t+1}) = \mu(E(N_t) + 1)$

$$\text{et } E(N_t) = \frac{E(S_{N_t+1})}{\mu} - 1.$$

Indication pour l'existence : choisir $a > 0$ tel que $q = P(X_1 \geq a) > 0$ et comparer S_n à

$$a \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_i \geq a]}.$$

Lorsque $q < 1$, montrer, pour $m = \lfloor t/a \rfloor$, qu'il existe $C_t > 0$ tel que $P(S_n \leq t) \leq C_t n^m (1-q)^n$ pour $n \geq 1$. La comparaison à une série géométrique permet de conclure. Traiter séparément $q = 1$.

15. Montrer que, pour tout réel $t > 0$, $\frac{E(N_t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$.

16. Soit $b > 0$. On pose $\tilde{X}_i = \min(b, X_i)$.

16. a) Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, positives et de même loi.

16. b) On pose

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i$$

et $\tilde{\mu}_b = E(\tilde{X}_1)$. On considère le processus de renouvellement $\tilde{N}_t$ associé aux $\tilde{X}_i$, défini sur l'événement de probabilité 1 où $\tilde{S}_n \rightarrow +\infty$.

16. b) i) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\tilde{S}_n \leq S_n$.

16. b) ii) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\tilde{N}_t \geq N_t$.

16. b) iii) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leq t + b$.

16. c) i) Montrer que, pour tout réel $t > 0$,

$$\frac{E(\tilde{N}_t)}{t} = \frac{E(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t}.$$

16. c) ii) En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{E(\tilde{N}_t)}{t} \leq \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b}.$$

16. d) On choisit $b = \sqrt{t}$.

16. d) i) Montrer que $\frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{t + \sqrt{t}}{tE(\min(\sqrt{t}, X_1))}$.

16. d) ii) Montrer que $0 \leq X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leq X_1 \mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$.

16. d) iii) En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(\min(\sqrt{t}, X_1)) = \mu$.

16. d) iv) Conclure que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.