



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2021

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Première partie : Comportement asymptotique des temps de panne

1. a) i) On vérifie l'inégalité pour tout réel $x \geq 0$. Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^r \leq 1$. Si $x \geq 1$ et $r \leq 4$, alors $x^r \leq x^4$. Dans les deux cas, $x^r \leq 1 + x^4$. On applique cette inégalité à $x = X_1(\omega)$.
1. a) ii) La variable $1 + X_1^4$ est positive et admet une espérance finie par hypothèse. Pour $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, $0 \leq X_1^r \leq 1 + X_1^4$; la propriété de comparaison donnée dans le préambule assure donc l'existence de $E(X_1^r)$. En particulier, $\mu = E(X_1)$ est définie et positive ou nulle.
1. a) iii) Comme $P(X_1 > 0) > 0$ et $[X_1 > 0] = \bigcup_{m \geq 1} [X_1 \geq 1/m]$, il existe $m \geq 1$ tel que $P(X_1 \geq 1/m) > 0$. En effet, une réunion dénombrable d'événements de probabilité nulle a une probabilité nulle. L'inégalité $X_1 \geq \frac{1}{m} \mathbf{1}_{[X_1 \geq 1/m]}$ donne

$$\mu \geq \frac{1}{m} P(X_1 \geq 1/m) > 0.$$

1. a) iv) Pour tout $x \geq 0$, $|x - \mu| \leq x + \mu \leq 2 \max(x, \mu)$. Par conséquent,

$$0 \leq |X_1 - \mu|^4 \leq 16(X_1^4 + \mu^4).$$

Le majorant admet une espérance; il en est donc de même de $|X_1 - \mu|^4$. Le moment d'ordre 4 demandé existe.

2. a) Tout événement A_k intervenant dans B_{n+1} intervient également dans B_n , puisque $k \geq n + 1$ implique $k \geq n$. Ainsi $B_{n+1} \subset B_n$.
2. b) Si $\omega \in B$, alors, pour tout n , il existe $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$. Les indices correspondants sont donc non bornés, et nécessairement en nombre infini. Réciproquement, si ω appartient à une infinité de A_k , les indices de ces événements ne peuvent pas tous être inférieurs à un entier donné n . Il existe donc, pour tout n , un $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$; ainsi $\omega \in B_n$ pour tout n , donc $\omega \in B$.

2. c) La suite (B_n) est décroissante et $B = \bigcap_{n \geq 1} B_n$. Le théorème de continuité décroissante d'une probabilité donne $P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$.

2. d) L'union $C \cup D$ est la réunion disjointe de C et $D \setminus C$. L'additivité et la croissance de la probabilité donnent

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D \setminus C) \leq P(C) + P(D).$$

2. e) Par récurrence, la question précédente donne, pour $m \geq n$,

$$P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \leq \sum_{k=n}^m P(A_k).$$

Lorsque m tend vers l'infini, les unions de gauche croissent vers B_n . Par continuité croissante de la probabilité et convergence de la série donnée, on obtient

$$P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

2. f) Le reste d'une série convergente tend vers zéro. Ainsi

$$0 \leq P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \rightarrow 0.$$

La question 2(c) donne $P(B) = 0$. C'est la conséquence particulière dont on aura besoin; aucune hypothèse d'indépendance des événements n'a été utilisée.

3. a) Question adaptée au programme actuel : le mot « positives » de la phrase introductive originale a été supprimé. Des variables positives et centrées seraient nulles avec probabilité 1, ce qui ne permettrait pas l'application aux variables $X_k - \mu$ en 4(d).

Le moment d'ordre 4 entraîne celui d'ordre 2 : $|Y_1|^2 \leq 1 + |Y_1|^4$. Les Y_k sont centrées et

indépendantes, donc $E(\Sigma_n/n) = 0$ et $V(\Sigma_n/n) = n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 \leq P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

3. b) i) La fonction $x \mapsto x^4$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $|u| > \varepsilon$ équivaut à $u^4 > \varepsilon^4$ pour tout réel u . Les événements sont égaux, d'où l'égalité des probabilités.

3. b) ii) Posons $Z = (\Sigma_n/n)^4 \geq 0$. Cette variable est intégrable :

$$|\Sigma_n|^4 \leq n^4 \max_{1 \leq k \leq n} |Y_k|^4 \leq n^4 \sum_{k=1}^n |Y_k|^4.$$

On a point par point $Z \geq \varepsilon^4 \mathbf{1}_{[Z > \varepsilon^4]}$. En prenant les espérances et en divisant par $\varepsilon^4 > 0$, on obtient l'inégalité demandée. Cette preuve établit directement le cas particulier nécessaire de la majoration d'une probabilité par un moment ; aucun résultat non exigible n'est supposé connu.

3. b) iii) On développe le produit des quatre sommes. Les termes dont les quatre indices sont identiques donnent

$$\sum_k Y_k^4.$$

Les termes comportant deux indices distincts, chacun présent deux fois, donnent

$$6 \sum_{k < j} Y_k^2 Y_j^2,$$

car il y a $\binom{4}{2} = 6$ positions possibles pour le premier indice. Cette expression est égale à

$$3 \sum_k \sum_{j \neq k} Y_k^2 Y_j^2.$$

Dans chaque autre terme, les multiplicités des indices sont de type $(3, 1)$, $(2, 1, 1)$ ou $(1, 1, 1, 1)$. Il existe donc un indice présent exactement une fois. On attribue chaque tel terme à l'un de ces indices, par exemple au plus petit d'entre eux. En mettant en facteur son unique occurrence Y_k , les facteurs restants ne dépendent pas de Y_k . Leur somme, avec les coefficients du développement, définit W_k . Cela donne exactement la décomposition annoncée, sans qu'il soit nécessaire d'explicitier W_k .

3. b) iv) Tous les monômes du développement sont intégrables : la valeur absolue d'un monôme de degré total 4 est majorée par

$$\max_k |Y_k|^4 \leq \sum_k |Y_k|^4.$$

De même, chaque W_k , polynôme de degré 3 des autres variables, est intégrable, en utilisant $u^3 \leq 1 + u^4$ pour $u \geq 0$.

Par le lemme des coalitions, Y_k et W_k sont indépendantes ; ainsi

$E(Y_k W_k) = E(Y_k)E(W_k) = 0$. Pour $j \neq k$, Y_k^2 et Y_j^2 sont indépendantes et intégrables, donc $E(Y_k^2 Y_j^2) = \sigma^4$. Il y a $n(n-1)$ couples ordonnés (k, j) avec $j \neq k$. La linéarité de l'espérance donne donc

$$E((\Sigma_n)^4) = n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4.$$

3. b) v) En divisant l'égalité précédente par n^4 ,

$$E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) = \frac{\rho^4}{n^3} + \frac{3(n-1)\sigma^4}{n^3} \leq \frac{\rho^4 + 3\sigma^4}{n^2}.$$

Le choix $C = 1 + \rho^4 + 3\sigma^4$ fournit une constante strictement positive, y compris lorsque les variables sont nulles avec probabilité 1.

3. b) vi) Dans 3(b)(ii), on prend $\varepsilon = n^{-1/8}$, qui est strictement positif. Son inverse à la puissance quatrième est $n^{1/2}$. Par conséquent,

$$P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > n^{-1/8}\right) \leq n^{1/2} \frac{C}{n^2} = \frac{C}{n^{3/2}}.$$

4. a) D'après 3(b)(vi), $0 \leq P(A_n) \leq Cn^{-3/2}$. La série de Riemann d'exposant $3/2 > 1$ converge ; par comparaison,

$$\sum_n P(A_n)$$

converge.

4. b) On applique le résultat entièrement démontré en 2 à cette suite d'événements. La probabilité d'appartenir à une infinité de A_n est nulle.
4. c) Sur l'événement complémentaire, de probabilité 1, il existe un entier $n_0(\omega)$ tel que, pour tout $n \geq n_0(\omega)$, $\omega \notin A_n$. Ainsi $|\Sigma_n(\omega)/n| \leq n^{-1/8} \rightarrow 0$. L'événement annoncé contient donc un événement de probabilité 1 ; sa probabilité est 1.
4. d) On applique ce qui précède aux variables $Y_k = X_k - \mu$. Elles sont indépendantes, de même loi et centrées. Le moment d'ordre 4 existe par 1(a)(iv). Or $\Sigma_n = S_n - n\mu$, donc $\Sigma_n/n = S_n/n - \mu$. La conclusion de 4(c) devient $P(\lim_n S_n/n = \mu) = 1$.
5. a) Pour chaque ω , $S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega) = X_{n+1}(\omega) \geq 0$. La suite est donc croissante et positive. Si elle est majorée, elle converge vers un réel positif ; sinon elle tend vers $+\infty$. Dans les deux cas, $S_\infty(\omega)$ est défini comme annoncé.
5. b) Lorsque $S_\infty(\omega)$ est fini, $0 \leq S_n(\omega) \leq S_\infty(\omega)$. En divisant par n et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $S_n(\omega)/n \rightarrow 0$.
5. c) D'après 4(d), $S_n/n \rightarrow \mu > 0$ sur un événement de probabilité 1. Cet événement ne rencontre pas $[S_\infty < +\infty]$, puisque 5(b) imposerait alors une limite nulle. Il est donc inclus dans $[S_\infty = +\infty]$, dont la probabilité vaut 1.

Deuxième partie : Le processus de renouvellement

6. a) Question adaptée au programme actuel : le processus est défini sur $\Omega_0 = [S_n \rightarrow +\infty]$, de probabilité 1. Cette précision rend le maximum fini pour

chaque issue considérée. Le choix de cet univers ne modifie aucune probabilité ni aucune loi, car son complément est de probabilité nulle.

Pour $\omega \in \Omega_0$, l'ensemble $\{k : S_k(\omega) \leq t\}$ contient 0 et est fini. Si $s \leq t$, $\{k : S_k(\omega) \leq s\} \subset \{k : S_k(\omega) \leq t\}$. Les maxima vérifient donc $N_s(\omega) \leq N_t(\omega)$.

6. b) Si $S_n \leq t$, l'indice n appartient à l'ensemble définissant N_t , d'où $N_t \geq n$.
Réciproquement, si $N_t \geq n$, la croissance de S_k donne $S_n \leq S_{N_t} \leq t$. Les événements sont donc égaux. Pour $n = 0$, les deux événements sont l'univers.
6. c) Pour chaque issue, $t \mapsto N_t(\omega)$ est croissante et positive d'après 6(a). Elle admet donc une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
6. d) i) Si la limite vaut l'entier K , il existe $T_\omega > 0$ tel que $|N_t(\omega) - K| < 1/2$ pour $t \geq T_\omega$. Comme $N_t(\omega)$ et K sont des entiers, cela impose $N_t(\omega) = K$.
6. d) ii) À $t = T_\omega$, la définition du maximum donne $S_K(\omega) \leq T_\omega$. Pour tout $t \geq T_\omega$, on ne peut pas avoir $S_{K+1}(\omega) \leq t$, sinon $N_t(\omega) \geq K + 1$. Ainsi $S_{K+1}(\omega) > t$.
6. d) iii) Soit $u > 0$. On peut choisir $t \geq T_\omega$ avec $t > S_K(\omega) + u$. Alors $X_{K+1}(\omega) = S_{K+1}(\omega) - S_K(\omega) > t - S_K(\omega) > u$. Cette inégalité pour tout $u > 0$ est impossible, puisque X_{K+1} est une variable à valeurs réelles finies. La limite ne peut donc pas être un entier fini. Comme une fonction croissante à valeurs entières ne peut avoir de limite réelle non entière, aucune limite finie n'est possible.
6. d) iv) Il résulte de 6(c) et de la contradiction précédente que $N_t(\omega) \rightarrow +\infty$ pour chaque $\omega \in \Omega_0$. En particulier, $P(N_\infty = +\infty) = 1$.

7. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Python

```
def renouvellement(t):
    N = 0
    S = 0
```

```
while S <= t:
    S = S + X()
    N = N + 1
return N - 1
```

Après chaque passage dans la boucle, N est le nombre de durées simulées et S leur somme. La boucle s'arrête au premier indice m tel que $S_m > t$. Tous les indices jusqu'à $m - 1$ vérifient $S_k \leq t$, même lorsque certaines durées sont nulles. Le résultat doit donc être $m - 1$, d'où `return N - 1`. L'arrêt a lieu avec probabilité 1 par la divergence des sommes. La fonction $X()$ est fournie par l'énoncé ; aucun import supplémentaire n'est nécessaire pour cet algorithme.

8. a) Comme N_t est entière, $[N_t \geq n]$ est l'union disjointe de $[N_t = n]$ et de $[N_t \geq n + 1]$. L'additivité des probabilités donne l'égalité demandée, y compris pour $n = 0$.

8. b) i) Puisque $S_0 = 0$, $F_0(t) = 1$ sur $\mathbb{R}_+$; si on prolonge sa définition à tous les réels, $F_0(t) = 0$ pour $t < 0$. Comme $S_1 = X_1$, $F_1 = F$ sur $\mathbb{R}_+$.

8. b) ii) On remplace les deux probabilités de queue dans 8(a) par celles des événements égaux de 6(b) :

$$P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

9. Posons $I = \{k \in \mathbb{N} : P(U = k) > 0\}$. Comme U et U' ont la même loi, I est aussi l'ensemble des valeurs de U' de probabilité strictement positive. Pour $j \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales donne

$$P(V = j) = \sum_{k \in I} P(U = k) P_{[U=k]}(V = j).$$

Les poids et les probabilités conditionnelles sont égaux à ceux obtenus avec U' , V' , donc

cette somme vaut

$$\sum_{k \in I} P(U' = k) P_{[U'=k]}(V' = j) = P(V' = j).$$

Les lois coïncident. Les termes correspondant à une valeur de probabilité nulle ne nécessitent aucun conditionnement.

10. a) Question adaptée au programme actuel : on explicite $0 < p < 1$. Pour $p = 0$, les temps d'attente ne sont pas finis ; pour $p = 1$, les temps sont déterministes et certains conditionnements des questions suivantes n'ont pas de sens. Le cas non dégénéré annoncé évite ces difficultés.

L'événement $[W = i]$ est $[Z_1 = 0] \cap \dots \cap [Z_{i-1} = 0] \cap [Z_i = 1]$. Par indépendance, sa probabilité vaut $(1 - p)^{i-1}p$. De plus, $P(W > m) = (1 - p)^m \rightarrow 0$, donc W est fini avec probabilité 1. Ainsi W suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.

Pour justifier également l'existence de tous les W_n , on considère des blocs disjoints de n essais. Chaque bloc a une probabilité $p^n > 0$ de ne contenir que des succès. La probabilité qu'aucun des r premiers blocs n'ait cette propriété vaut $(1 - p^n)^r \rightarrow 0$. Il y a donc au moins n succès avec probabilité 1. Cette propriété étant vraie pour tout n , les temps W_n sont simultanément finis sur un événement de probabilité 1.

10. b) i) Pour que le n -ième succès arrive à l'essai k , il faut exactement $n - 1$ succès parmi les $k - 1$ premiers essais, puis un succès au k -ième essai. Le nombre de succès initiaux suit $\mathcal{B}(k - 1, p)$ et est indépendant de Z_k . Ainsi, pour $k \geq n$,

$$P(W_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{k-n} p = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

Cette probabilité est strictement positive lorsque $k \geq n$, ce qui autorise les conditionnements suivants. Elle est nulle pour $k < n$.

10. b) ii) Sous $[W_n = k]$, l'égalité $W_{n+1} = j$ exige $Z_{k+1} = \dots = Z_{j-1} = 0$ et $Z_j = 1$. Le premier événement est fonction des k premiers essais, tandis que les conditions

supplémentaires concernent uniquement les suivants. Le lemme des coalitions et l'indépendance donnent donc

$$P_{[W_n=k]}(W_{n+1} = j) = (1-p)^{j-k-1}p.$$

10. c) i) Question adaptée au programme actuel : on précise $k \geq n$, afin de ne pas conditionner par un événement impossible. Pour ces valeurs, $P(S_n = k) > 0$: on peut par exemple choisir les durées $1, \dots, 1, k - n + 1$, dont chacune a une probabilité strictement positive.

La variable S_n est fonction de $X_1, \dots, X_n$ et est donc indépendante de X_{n+1} . Sous $[S_n = k]$, on a $S_{n+1} = j$ si et seulement si $X_{n+1} = j - k$. Pour $j \geq k + 1$,

$$P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = j) = P(X_{n+1} = j - k) = p(1-p)^{j-k-1}.$$

Pour $j \leq k$, la probabilité conditionnelle est nulle, puisque $X_{n+1} \geq 1$.

10. c) ii) Méthode 1 — Récurrence et lois conditionnelles

Pour $n = 1$, $S_1 = X_1$ et $W_1 = W$ suivent la même loi géométrique. Supposons S_n et W_n de même loi. Pour toute valeur k de probabilité non nulle, les questions 10(b)(ii) et 10(c)(i) montrent que les lois conditionnelles de S_{n+1} sachant $S_n = k$ et de W_{n+1} sachant $W_n = k$ sont les mêmes. Pour $j \leq k$, les deux probabilités sont nulles ; pour $j \geq k + 1$, elles valent $p(1-p)^{j-k-1}$. La question 9 permet de conclure que S_{n+1} et W_{n+1} ont la même loi. Par récurrence, l'égalité en loi vaut pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Calcul direct de la loi par les durées

Pour $k \geq n$, l'événement $S_n = k$ est l'union disjointe des événements $[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$ où les x_i sont des entiers strictement positifs de somme k . Chaque événement a, par indépendance, la même probabilité $p^n(1-p)^{k-n}$. On compte ces listes de durées en plaçant $n - 1$ coupures parmi les $k - 1$ intervalles séparant k unités alignées : chaque choix donne exactement n groupes non vides, dont les tailles sont $x_1, \dots, x_n$, et réciproquement. Il y a donc $\binom{k-1}{n-1}$ listes. Ainsi

$$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = P(W_n = k).$$

Pour $k < n$, les deux probabilités sont nulles. Cette méthode retrouve la loi explicite par un comptage élémentaire ; la première met plutôt en évidence le mécanisme commun d'attente entre deux succès.

10. d) Posons $m = \lfloor t \rfloor$. Les variables S_n et W_n sont entières et supérieures ou égales à n . D'après 10(c)(ii) et 10(b)(i),

$$F_n(t) = P(W_n \leq m) = \sum_{k=n}^m \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

La même formule au rang $n+1$ et l'identité de 8(b)(ii) donnent exactement la différence de sommes demandée. Si $m < n$, les deux sommes sont nulles et $N_t < n$ nécessairement. Si $m = n$, la seconde somme est vide et seule la possibilité de n durées égales à 1 contribue.

Troisième partie : Théorème du renouvellement

11. a) Par définition du maximum, $S_{N_t} \leq t$. Si $S_{N_t+1} \leq t$, l'indice $N_t + 1$ appartiendrait à l'ensemble dont N_t est le maximum, contradiction. Ainsi $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$.
11. b) La question 6 donne $N_t(\omega) \rightarrow +\infty$ pour chaque $\omega \in \Omega_0$. On peut donc choisir $T_\omega > 0$ tel que $N_t(\omega) \geq 1$ pour $t \geq T_\omega$. On divise les inégalités de 11(a) par ce nombre strictement positif, ce qui donne le résultat annoncé.
11. c) Soit $A = [S_n/n \rightarrow \mu]$, de probabilité 1 par 4(d). Pour $\omega \in A \cap \Omega_0$ et $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $|S_n(\omega)/n - \mu| < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Comme $N_t(\omega) \rightarrow +\infty$, il existe T tel que $N_t(\omega) \geq n_0$ pour $t \geq T$. Ainsi $|S_{N_t}(\omega)/N_t(\omega) - \mu| < \varepsilon$. La limite demandée vaut donc μ sur $A \cap \Omega_0$, événement de probabilité 1. Il s'agit d'une application de la définition d'une limite de suite à une issue fixée.
11. d) Sur le même événement et pour t assez grand,

$$\frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \left(1 + \frac{1}{N_t}\right).$$

Pour une issue fixée, le premier facteur tend vers μ , par le raisonnement de 11(c) avec l'indice $N_t + 1$, et le second vers 1. Leur produit tend donc vers μ . La conclusion vaut avec probabilité 1.

- 11. e)** Sur cet événement de probabilité 1, les deux bornes de 11(b) tendent vers μ . Le théorème d'encadrement donne $t/N_t \rightarrow \mu$. Comme $\mu > 0$, on peut prendre les inverses pour t assez grand, d'où $N_t/t \rightarrow 1/\mu$. Aucun passage à l'espérance ne découle de cet encadrement seul.
- 12. a)** Si $U(\omega) = 0$, la convention donne $Y_n(\omega) = 0$ pour tout n , et on peut prendre $N_\omega = 1$. Sinon, $u = U(\omega) > 0$; on choisit un entier $N_\omega > 1/u$. Pour $n \geq N_\omega$, $1/n < u$, donc $Y_n(\omega) = 0$ par définition.
- 12. b)** Toute issue considérée vérifie que $Y_n(\omega)$ est nulle à partir d'un certain rang. En particulier, $Y_n(\omega) \rightarrow 0$; la probabilité de cet événement est 1.
- 12. c)** La variable Y_n prend les valeurs 0 et n , avec $Y_n = n$ exactement sur $[0 < U \leq 1/n]$. Comme U est uniforme et $P(U = 0) = 0$, la probabilité de cet événement vaut $1/n$. Ainsi $E(Y_n) = n(1/n) = 1$ pour tout n . La limite des espérances est donc 1, tandis que la variable limite est identiquement nulle et son espérance vaut 0. L'échange des deux opérations serait incorrect.
- 13. a)** Pour une issue ω , posons $j = J(\omega) \in \mathbb{N}$. L'indicatrice $\mathbf{1}_{[J \geq k]}(\omega)$ vaut 1 pour $1 \leq k \leq j$ et 0 pour $k > j$. Ainsi la série de droite ne comporte que les termes $X_1(\omega), \dots, X_j(\omega)$, et sa somme vaut $S_j(\omega) = S_J(\omega)$. Pour $j = 0$, tous les termes et S_0 sont nuls.
- 13. b)** Question adaptée au programme actuel : l'hypothèse d'indépendance de l'énoncé est imposée pour $n \geq 0$, et pas seulement pour $n \geq 1$ comme dans l'original. Le rang $n = 0$ est nécessaire pour traiter $k = 1$.

Pour tout $k \geq 1$, $\mathbf{1}_{[J \geq k]} = 1 - \mathbf{1}_{[J \leq k-1]}$. Par l'hypothèse au rang $k - 1$, la seconde

indicateur est indépendante de X_k . Une fonction de cette indicatrice, ici son complément à 1, reste indépendante de X_k . On obtient l'indépendance demandée, y compris pour $k = 1$ grâce au rang $n = 0$.

13. c) i) Pour $u = U(\omega) \in \mathbb{N}$, les indicatrices $\mathbf{1}_{[U \geq n]}(\omega)$ valent 1 exactement pour $n = 1, \dots, u$. Leur somme vaut donc u . Cela prouve point par point l'identité

$$U = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[U \geq n]}.$$

13. c) ii) Question adaptée au programme actuel : la condition d'existence de l'espérance est explicitée.

Supposons d'abord $E(U) < +\infty$. Pour tout $m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^m \mathbf{1}_{[U \geq n]} \leq U,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^m P(U \geq n) \leq E(U).$$

Les sommes partielles sont positives, croissantes et majorées, donc la série converge. Réciproquement, si cette série converge, l'admission sur les sommes de variables positives, appliquée aux indicatrices de 13(c)(i), assure que U admet une espérance et que

$$E(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(\mathbf{1}_{[U \geq n]}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geq n).$$

Cette même égalité s'applique donc aussi dans le premier cas, une fois la convergence de la série établie.

13. d) Question adaptée au programme actuel : on suppose explicitement $E(J) < +\infty$, afin que les espérances annoncées soient finies.

D'après 13(b), X_k et $\mathbf{1}_{[J \geq k]}$ sont indépendantes. Elles admettent une espérance, la première par 1 et la seconde parce qu'elle est bornée. Leur produit est donc intégrable et

$$E(X_k \mathbf{1}_{[J \geq k]}) = E(X_k)P(J \geq k) = \mu P(J \geq k).$$

Par 13(c)(ii),

$$\sum_{k \geq 1} P(J \geq k) = E(J) < +\infty.$$

La série des espérances des termes positifs de 13(a) converge donc et vaut $\mu E(J)$.

L'admission de l'énoncé donne simultanément l'existence de $E(S_J)$ et l'identité $E(S_J) = \mu E(J)$. Aucune formule concernant une somme arrêtée n'est utilisée sans preuve : c'est précisément ce calcul qui l'établit dans le cas considéré.

14. a) Question adaptée au programme actuel : on vérifie également le rang $n = 0$, nécessaire à l'hypothèse corrigée de 13.

Pour $n \geq 1$, $[J \leq n] = [N_t < n] = [S_n > t]$, par complémentation de l'égalité de 6(b).

Ainsi $\mathbf{1}_{[J \leq n]}$ est fonction de $X_1, \dots, X_n$. Par le lemme des coalitions, elle est indépendante des variables $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$, au sens où elle est indépendante de toute famille finie de celles-ci. Pour $n = 0$, $J = N_t + 1 \geq 1$, donc $\mathbf{1}_{[J \leq 0]} = 0$ est constante et indépendante de toutes les variables. L'hypothèse de 13 est vérifiée à tous les rangs nécessaires.

14. b) Question adaptée au programme actuel : l'existence de $E(N_t)$ est démontrée avant d'appliquer 13(d), à l'aide de l'indication ajoutée au sujet.

Comme $P(X_1 > 0) > 0$, le raisonnement de 1(a)(iii) fournit $a > 0$ tel que

$q = P(X_1 \geq a) > 0$. Posons $I_i = \mathbf{1}_{[X_i \geq a]}$. Les I_i sont indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre q , et

$$S_n \geq a \sum_{i=1}^n I_i.$$

Si $q = 1$, on a $S_n \geq an$ avec probabilité 1, donc $P(N_t \geq n) = P(S_n \leq t) = 0$ dès que $n > t/a$. La variable N_t est alors bornée avec probabilité 1 et admet une espérance.

Supposons $0 < q < 1$ et posons $m = \lfloor t/a \rfloor$. Par comparaison des événements, puis par la loi binomiale,

$$P(N_t \geq n) = P(S_n \leq t) \leq P\left(\sum_{i=1}^n I_i \leq m\right) = \sum_{j=0}^{\min(m,n)} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j}.$$

Pour $n \geq 1$ et $0 \leq j \leq \min(m, n)$, $\binom{n}{j} \leq n^j/j! \leq n^m/j!$. En notant $r = 1 - q \in]0, 1[$ et

$$C_t = \sum_{j=0}^m (q/r)^j/j!,$$

on obtient

$$P(N_t \geq n) \leq C_t n^m r^n.$$

Les croissances comparées donnent $n^m r^{n/2} \rightarrow 0$: son logarithme est $m \ln n + (n/2) \ln r$, qui tend vers $-\infty$ puisque $\ln r < 0$ et $\ln n/n \rightarrow 0$. Il existe donc $M > 0$ tel que $n^m r^n \leq M(\sqrt{r})^n$ pour tout $n \geq 1$. La série géométrique de raison $\sqrt{r} < 1$ converge ; par comparaison,

$$\sum_{n \geq 1} P(N_t \geq n)$$

converge. La question 13(c)(ii) prouve que $E(N_t)$ existe.

Ainsi $J = N_t + 1$ admet une espérance. Avec 14(a), toutes les hypothèses de 13(d) sont réunies. On obtient

$$E(S_{N_t+1}) = \mu E(N_t + 1) = \mu(E(N_t) + 1).$$

Comme $\mu > 0$, on peut diviser et conclure $E(N_t) = \frac{E(S_{N_t+1})}{\mu} - 1$. Ce raisonnement garantit aussi l'existence de $E(S_{N_t+1})$, sans la supposer au préalable.

15. Par 11(a), $S_{N_t+1} > t$. Cette variable admet une espérance d'après 14(b), donc $E(S_{N_t+1}) \geq t$. L'identité de 14(b) donne $E(N_t) \geq t/\mu - 1$. Comme $t > 0$, la division par t donne $\frac{E(N_t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$.

16. a) Pour $b > 0$, les variables $\tilde{X}_i$ sont les images des X_i par la même fonction $x \mapsto \min(b, x)$. Elles ont donc la même loi et sont indépendantes par le lemme des coalitions. Elles sont positives, puisque $X_i \geq 0$ et $b > 0$.

16. b) i) Pour chaque i , $0 \leq \tilde{X}_i \leq X_i$. En sommant ces inégalités de 1 à n , on obtient $\tilde{S}_n \leq S_n$ pour tout $n \geq 1$.

Question adaptée au programme actuel : la définition de $\tilde{N}_t$ se fait, comme celle de N_t , sur l'événement de probabilité 1 où les sommes correspondantes divergent. Cette propriété est applicable ici : $0 \leq \tilde{X}_i \leq b$ assure l'existence du moment d'ordre 4, et $P(\tilde{X}_i = 0) = P(X_i = 0) < 1$. Toutes les hypothèses des parties précédentes sont donc satisfaites. En particulier, $\tilde{\mu}_b > 0$, et 5(c) donne $\tilde{S}_n \rightarrow +\infty$ avec probabilité 1. Les comparaisons de processus sont faites sur l'intersection des deux événements de probabilité 1 où ils sont définis.

16. b) ii) Si $S_n \leq t$, alors $\tilde{S}_n \leq t$ par 16(b)(i). L'ensemble des indices admissibles pour N_t est donc inclus dans celui de $\tilde{N}_t$. Les maxima vérifient $N_t \leq \tilde{N}_t$.

16. b) iii) Par définition du processus tronqué, $\tilde{S}_{\tilde{N}_t} \leq t$. La durée suivante est au plus b , donc

$$\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} = \tilde{S}_{\tilde{N}_t} + \tilde{X}_{\tilde{N}_t+1} \leq t + b.$$

16. c) i) On applique 14(b) à la suite $(\tilde{X}_i)$. Les hypothèses ont été vérifiées en 16(b)(i); en particulier, $E(\tilde{N}_t)$ et $E(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})$ existent et $\tilde{\mu}_b > 0$. On obtient

$$E(\tilde{N}_t) = \frac{E(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{\tilde{\mu}_b} - 1.$$

La division par $t > 0$ fournit exactement l'égalité demandée.

16. c) ii) Les variables $N_t, \tilde{N}_t$ admettent une espérance et vérifient $N_t \leq \tilde{N}_t$, donc $E(N_t) \leq E(\tilde{N}_t)$. D'autre part, 16(b)(iii), la croissance de l'espérance et 16(c)(i) donnent

$$\frac{E(\tilde{N}_t)}{t} \leq \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t} \leq \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b}.$$

Ces deux inégalités donnent l'encadrement demandé, pour tout $b > 0$ et tout $t > 0$.

16. d) i) Pour chaque $t > 0$, on choisit $b = \sqrt{t} > 0$ dans 16(c)(ii). Par définition,

$$\tilde{\mu}_{\sqrt{t}} = E(\min(\sqrt{t}, X_1)). \text{ Ainsi}$$

$$\frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{t + \sqrt{t}}{tE(\min(\sqrt{t}, X_1))}.$$

Il n'est pas nécessaire de construire un processus commun à tous les niveaux de troncature : l'inégalité précédente est vraie séparément pour chaque $b > 0$, donc pour le choix numérique $b = \sqrt{t}$.

16. d) ii) Si $X_1 \leq \sqrt{t}$, la différence et le membre de droite sont nuls. Si $X_1 > \sqrt{t}$, la différence vaut $X_1 - \sqrt{t}$, comprise entre 0 et X_1 . Cela prouve dans tous les cas

$$0 \leq X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leq X_1 \mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$$

16. d) iii) La variable $\min(\sqrt{t}, X_1)$ est positive et majorée par X_1 , donc elle admet une espérance. Pour obtenir une majoration explicite qui tend vers zéro, on remarque que, sur $[X_1 > \sqrt{t}]$, $X_1 \leq X_1^2/\sqrt{t}$. Ainsi, par 16(d)(ii),

$$0 \leq \mu - E(\min(\sqrt{t}, X_1)) \leq \frac{E(X_1^2)}{\sqrt{t}}.$$

Le moment d'ordre 2 existe par 1(a)(ii), et le dernier membre tend vers zéro. Par encadrement, $E(\min(\sqrt{t}, X_1)) \rightarrow \mu$. Ce calcul justifie le passage à la limite sans aucun échange général de limite et d'espérance.

16. d) iv) La borne inférieure de 15 et la borne supérieure de 16(d)(i) donnent, pour $t > 0$,

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \leq \frac{E(N_t)}{t} \leq \frac{1 + 1/\sqrt{t}}{E(\min(\sqrt{t}, X_1))}.$$

La borne de gauche tend vers $1/\mu$. Celle de droite tend également vers $1/\mu$, puisque son numérateur tend vers 1 et son dénominateur vers $\mu > 0$. Le théorème d'encadrement permet de conclure

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Relevé des adaptations

- 2(b) : les deux assertions portent les repères (A) et (B), afin d'éviter une notation qui soit interprétée comme une mise en gras en Markdown.
- 3, introduction et 4(d) : suppression du mot « positives » dans les hypothèses sur les variables centrées Y_k . L'original imposait sinon des variables nulles avec probabilité 1, incompatibles avec l'application aux $X_k - \mu$ en général.
- 6 et 11 : précision de l'univers de probabilité 1 sur lequel les sommes divergent et les maxima définissant N_t sont finis. Les lois sont conservées ; les affirmations portant sur chaque issue sont ainsi bien définies.
- 7 : code adapté en Python, avec maintien des blancs à compléter dans le sujet et explicitation de la loi simulée par $X()$. Le résultat renvoyé est le nombre de durées dont la somme cumulée ne dépasse pas t .
- 10 : précision $0 < p < 1$ et définition des temps d'attente sur l'événement de probabilité 1 où les succès sont en nombre infini, pour garantir finitude et validité des conditionnements. En 10(c)(i), précision $k \geq n$, car $S_n \geq n$ rend les autres conditionnements impossibles.
- 13(b) et 14(a) : extension de l'hypothèse d'indépendance au rang $n = 0$. Elle est indispensable pour traiter $k = 1$ dans 13(b). Sans elle, une variable J dépendant de X_1 et ne prenant que les valeurs 0, 1 satisferait les hypothèses originales à partir du rang 1, sans vérifier en général l'égalité de 13(d).

- 13(c)(ii) et 13(d) : explicitation des conditions d'existence des espérances. La relation sur la somme de variables positives déjà admise dans le sujet permet d'établir la caractérisation de 13(c)(ii) et l'existence de $E(S_J)$ lorsque $E(J)$ est finie.
- 14(b) : ajout d'une indication pour établir $E(N_t) < +\infty$ par une comparaison binomiale et une série géométrique. Cette preuve évite d'utiliser la formule de 13(d) avant d'avoir vérifié son hypothèse d'intégrabilité.
- 16(b) : même précision de définition du processus tronqué sur un événement de probabilité 1. Les hypothèses permettant de lui appliquer les résultats précédents sont vérifiées dans le corrigé.