



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2020

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Première partie : Biais par la taille, exemples discrets

1. a) i) Par la définition de la loi binomiale, pour $0 \leq k \leq 10$,

$$p_k = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}.$$

Hors de cet ensemble, la probabilité est nulle.

1. a) ii) Une variable binomiale de paramètres n, p a pour espérance np . Ici

$$E(X) = 10/5 = 2.$$

1. a) iii) Toutes les variables considérées ici sont bornées et possèdent donc leurs moments. La formule de la variance binomiale donne $V(X) = np(1-p) = 8/5$. Par Koenig-Huygens,

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{8}{5} + 4 = \frac{28}{5}.$$

1. b) i) Chacune des M_k familles apporte exactement k enfants. Ainsi

$$N_k = kM_k = kp_k M, \text{ y compris pour } k = 0.$$

1. b) ii) En sommant ces égalités,

$$\frac{N}{M} = \sum_{k=0}^{10} kp_k = E(X) = 2.$$

1. b) iii) Comme $N = 2M > 0$, la proportion recherchée est

$$N_k/N = kp_k M/(2M) = kp_k/2.$$

1. c) i) Question adaptée au programme actuel : le tirage est précisé comme uniforme dans la population des enfants du modèle, ce qui fixe l'unité statistique et permet d'utiliser les effectifs précédents. Pour $1 \leq k \leq 10$, exactement N_k personnes sur N appartiennent à une famille de taille k . Ainsi $P(Y = k) = N_k/N = kp_k/2$. Une famille sans enfant n'est jamais rencontrée par ce tirage.

1. c) ii) Par transfert pour une loi finie,

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{10} k \frac{kp_k}{2} = \frac{1}{2} E(X^2) = \frac{E(X^2)}{E(X)}.$$

1. c) iii) On obtient $E(Y) = (28/5)/2 = 14/5 = 2,8 > 2 = E(X)$. Les grandes familles sont surreprésentées lorsqu'on interroge les enfants plutôt que les familles.

2. a) Puisque X est positive et non nulle avec une probabilité strictement positive, $E(X) > 0$. En effet, il existe un entier $i \geq 1$ tel que $P(X = i) > 0$, et $E(X) \geq iP(X = i) > 0$. Par la définition de l'espérance discrète,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X = i) = 1.$$

Chaque q_i étant positif ou nul, il s'agit bien d'une loi sur $\mathbb{N}^*$.

2. b) Le transfert donne une série positive,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} iP(X^* = i) = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 P(X = i) = \frac{E(X^2)}{E(X)} < +\infty.$$

Cette convergence justifie l'existence de l'espérance de X^* et donne sa valeur.

2. c) Par Koenig-Huygens et la question b),

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X)E(X^*) - E(X)^2 = E(X)(E(X^*) - E(X)).$$

2. d) Sous l'hypothèse de moment d'ordre 2, la variance est positive ou nulle et $E(X) > 0$. En divisant l'égalité précédente par $E(X)$, on obtient $E(X^*) - E(X) = V(X)/E(X) \geq 0$.

Le rappel de l'hypothèse de b) dans le sujet évite de parler d'une espérance finie de X^* sans l'avoir assurée.

3. a) i) Ici $E(X) = \lambda > 0$. Pour $k \geq 1$,

$$P(X^* = k) = \frac{k}{\lambda} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

La probabilité vaut zéro pour $k \leq 0$.

3. a) ii) Pour tout $k \geq 1$, $P(X+1 = k) = P(X = k-1) = e^{-\lambda} \lambda^{k-1} / (k-1)!$. Les deux variables ont donc les mêmes masses sur $\mathbb{N}^*$ et la même loi.

3. b) i) Posons $\mu = E(X) > 0$. L'égalité en loi donne, pour $k \geq 1$,

$$\frac{k}{\mu} P(X = k) = P(X^* = k) = P(X+1 = k) = P(X = k-1).$$

En multipliant par μ/k , on obtient la récurrence demandée.

3. b) ii) Pour $k = 0$, l'égalité est vraie puisque $0! = 1$. Si elle est vraie au rang k , alors

$$P(X = k+1) = \frac{\mu}{k+1} P(X = k) = \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} P(X = 0).$$

La récurrence établit la formule pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. b) iii) En sommant les masses, et en utilisant la série exponentielle de paramètre réel μ ,

$$1 = P(X = 0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k}{k!} = P(X = 0) e^{\mu}.$$

Ainsi $P(X = 0) = e^{-\mu}$ et $P(X = k) = e^{-\mu} \mu^k / k!$. Donc X suit la loi de Poisson de paramètre $\mu = E(X)$.

4. a) i) Pour un k fixé, les probabilités conditionnelles existent car $P(X = k) > 0$. Par la formule de la somme des premiers entiers,

$$\sum_{j=1}^n j P_{[X=k]}(T = j) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k j = \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

4. a) ii) On multiplie l'égalité précédente par $P(X = k)$ puis on somme :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n j P(X = k) P_{[X=k]}(T = j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k+1) P(X = k) = \frac{E(X+1)}{2}.$$

4. a) iii) La variable T est bornée et possède une espérance. La formule des probabilités totales appliquée au système complet $([X = k])_{1 \leq k \leq n}$ donne

$$E(T) = \sum_{j=1}^n j P(T = j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n j P(X = k) P_{[X=k]}(T = j).$$

4. a) iv) Les sommes étant finies, on peut en permuter l'ordre. Les deux expressions précédentes sont égales, d'où $E(T) = E(X+1)/2 = (E(X) + 1)/2$.

4. b) i) Pour tout k , $P(X^* = k) = k P(X = k) / E(X) > 0$. Les conditionnements existent. Le même calcul explicite donne

$$\sum_{j=1}^n j P_{[X^*=k]}(T^* = j) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k j = \frac{k+1}{2}.$$

4. b) ii) La variable T^* est bornée. Par les probabilités totales,

$$E(T^*) = \sum_{j=1}^n jP(T^* = j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n jP(X^* = k)P_{[X^*=k]}(T^* = j).$$

4. b) iii) En échangeant les deux sommes finies puis en appliquant i),

$$E(T^*) = \sum_{k=1}^n P(X^* = k) \frac{k+1}{2} = \frac{E(X^* + 1)}{2}.$$

4. b) iv) La variable X étant bornée, la question 2.d) s'applique. Ainsi

$$E(T^*) - E(T) = \frac{E(X^*) - E(X)}{2} = \frac{V(X)}{2E(X)} \geq 0.$$

Le temps d'attente moyen augmente avec le biais par la longueur des intervalles. Cette conclusion porte sur les modèles discrets spécifiés dans le sujet.

Deuxième partie : Biais par la taille, propriétés

5. a) Pour $x < 0$, $g(x) = 0$, et pour $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$. La régularité par morceaux de f est conservée par multiplication par $x/E(X)$; les limites latérales finies aux points réels le sont également. Puisque X est positive et admet une espérance,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{E(X)} \int_0^{+\infty} xf(x) dx = 1.$$

La fonction g est donc une densité, nulle sur $] -\infty, 0[$, et définit une variable positive.

5. b) i) Comme $a > 0$, pour tout réel x , $P(aX \leq x) = P(X \leq x/a) = F_X(x/a)$. Cette fonction est continue et sa dérivée, aux points où elle existe, vaut $f(x/a)/a$. On obtient donc la densité $f_a(x) = f(x/a)/a$.

5. b) ii) Par linéarité, $E(aX) = aE(X) > 0$. Une densité de $(aX)^*$ est alors

$$x \mapsto \frac{x}{aE(X)} \frac{1}{a} f(x/a) = \frac{x}{a^2 E(X)} f(x/a).$$

En appliquant i) à X^* , une densité de aX^* est

$$x \mapsto \frac{1}{a}g(x/a) = \frac{1}{a} \frac{x/a}{E(X)} f(x/a) = \frac{x}{a^2 E(X)} f(x/a).$$

Ces densités coïncident, donc les lois sont égales.

5. c) Il existe $C \geq 0$ tel que $|h(x)| \leq C$ pour tout $x \geq 0$. Alors $|Xh(X)| \leq CX$, ce qui justifie l'existence de son espérance. La variable $h(X^*)$ est bornée et possède aussi une espérance. Le transfert est applicable aux fonctions continues sauf en un nombre fini de points. Il donne

$$E(h(X^*)) = \int_0^{+\infty} h(x)g(x) dx = \frac{1}{E(X)} \int_0^{+\infty} xh(x)f(x) dx = \frac{E(Xh(X))}{E(X)}.$$

Les intégrales sont absolument convergentes par la majoration précédente. Cette formule justifie la définition générale proposée ensuite dans le sujet.

6. a) Si $x_1 \geq x_2$, les deux différences sont positives ou nulles puisque f, g sont croissantes. Si $x_1 \leq x_2$, elles sont toutes deux négatives ou nulles. Leur produit est donc toujours positif ou nul.
6. b) Les produits $f(X_1)g(X_1)$ et $f(X_2)g(X_2)$ sont intégrables par hypothèse et égalité des lois. Les produits croisés sont intégrables par indépendance et intégrabilité des facteurs. On peut donc développer l'espérance :

$$\begin{aligned} E((f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2))) &= E(f(X_1)g(X_1)) + E(f(X_2)g(X_2)) \\ &\quad - E(f(X_1)g(X_2)) - E(f(X_2)g(X_1)). \end{aligned}$$

L'indépendance donne $E(f(X_1)g(X_2)) = E(f(X_1))E(g(X_2)) = E(f(X))E(g(X))$, et de même pour l'autre produit croisé. Les deux premiers termes valent $E(f(X)g(X))$.

L'égalité demandée en résulte.

6. c) Par a), la variable dont on calcule l'espérance en b) est positive. Son espérance est donc positive ou nulle. L'égalité de b) donne
- $$2E(f(X)g(X)) - 2E(f(X))E(g(X)) \geq 0, \text{ d'où la conclusion.}$$
7. a) i) Pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x^p \leq 1$. Pour $x \geq 1$, l'inégalité $p \leq m+1$ donne $x^p \leq x^{m+1}$. Dans les deux cas, $0 \leq x^p \leq 1 + x^{m+1}$.
7. a) ii) On en déduit $0 \leq X^p \leq 1 + X^{m+1}$. Le majorant admet une espérance finie par hypothèse; $E(X^p)$ existe donc et $E(X^p) \leq 1 + E(X^{m+1})$.
7. b) On applique la question 6 avec les fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \max(x, 0)$ et $g(x) = \max(x, 0)^m$. Sur les valeurs positives de X , on a $f(X) = X$, $g(X) = X^m$ et $f(X)g(X) = X^{m+1}$. Ces trois variables admettent une espérance, par a) et l'hypothèse. Il vient donc $E(X^{m+1}) \geq E(X)E(X^m)$.

Ce choix des prolongements est utile lorsque m est pair : la fonction $x \mapsto x^m$ n'est pas croissante sur tout $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur les valeurs prises par X .

7. c) Question adaptée au programme actuel. Résultat admis dans cette version adaptée : sous les hypothèses de la question 7, X^* admet un moment d'ordre m et $E((X^*)^m) = E(X^{m+1})/E(X)$. La définition avec les fonctions bornées ne permet pas d'appliquer directement la formule à $h(x) = x^m$; seule l'identité particulière nécessaire est ici admise.

En divisant b) par $E(X) > 0$, on obtient

$$E((X^*)^m) = \frac{E(X^{m+1})}{E(X)} \geq E(X^m).$$

L'identité admise sert précisément à reconnaître le premier membre comme un moment de la loi biaisée.

8. a) Si $x \leq y$, soit $x \leq t$, auquel cas $g_t(x) = 0 \leq g_t(y)$, soit $x > t$, auquel cas $y > t$ et $g_t(x) = g_t(y) = 1$. Ainsi g_t est croissante.

8. b) Comme $0 \leq g_t(X) \leq 1$, $0 \leq Xg_t(X) \leq X$. Son espérance existe.

Méthode 1 — Application de l'inégalité précédente

Les fonctions $x \mapsto x$ et g_t sont croissantes, X admet une espérance, et $g_t(X)$ est bornée. La question 6.c) s'applique et donne

$$E(Xg_t(X)) \geq E(X)E(g_t(X)) = E(X)P(X > t).$$

Méthode 2 — Comparaison directe au seuil

Posons $p = P(X > t)$. Pour tout $x > t$, $(x - t)(g_t(x) - p) = (x - t)(1 - p) \geq 0$. Pour $x \leq t$, ce produit vaut $(x - t)(-p) \geq 0$. Il est donc positif pour tout réel x .

La variable $(X - t)(g_t(X) - p)$ est intégrable puisque sa valeur absolue est majorée par $X + |t|$. On prend son espérance et on développe :

$$0 \leq E((X - t)(g_t(X) - p)) = E(Xg_t(X)) - pE(X) - t(E(g_t(X)) - p) = E(Xg_t(X)) - pE(X).$$

On retrouve l'inégalité demandée. La première méthode réutilise le résultat général établi en 6 ; la seconde exploite directement le seuil et ne nécessite pas de copie indépendante de X .

8. c) Question adaptée au programme actuel : on explicite $E(X) > 0$, indispensable à la définition de la loi biaisée. La restriction de g_t à $[0, +\infty[$ est bornée et continue sauf éventuellement en un point. On peut donc l'utiliser dans la définition :

$$P(X^* > t) = E(g_t(X^*)) = \frac{E(Xg_t(X))}{E(X)} \geq P(X > t).$$

Cette majoration vaut pour tout réel t , notamment pour $t < 0$ où les deux probabilités valent 1.

9. a) Chaque X_i est intégrable et la somme est finie. Par linéarité,

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu > 0.$$

9. b) Si les X_i ont la même loi, leurs espérances ont une même valeur $\mu_0 > 0$. Alors $\mu = n\mu_0$ et $P(J = k) = 1/n : J$ est uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

9. c) i) Rectification locale de l'énoncé original : le signe devant X_i^* doit être positif. En effet, sur l'événement $[J = i]$, $X_J = X_i$, $X_J^* = X_i^*$ et $T_n = S_n - X_i + X_i^*$. Comme les événements $[J = i]$ forment une partition,

$$h(T_n) = \sum_{i=1}^n h(T_n) \mathbf{1}_{[J=i]} = \sum_{i=1}^n h(S_n - X_i + X_i^*) \mathbf{1}_{[J=i]}.$$

Tous les arguments de h sont positifs ou nuls : $S_n - X_i$ est la somme des autres variables positives.

9. c) ii) La fonction h est bornée, donc tous les termes sont intégrables. Par indépendance, J est indépendante du vecteur $(X_1, \dots, X_n, X_1^*, \dots, X_n^*)$. Le lemme des coalitions entraîne l'indépendance de $\mathbf{1}_{[J=i]}$ et de $h(S_n - X_i + X_i^*)$. La linéarité puis la factorisation des espérances donnent

$$E(h(T_n)) = \sum_{i=1}^n E(h(S_n - X_i + X_i^*) \mathbf{1}_{[J=i]}) = \sum_{i=1}^n P(J = i) E(h(S_n - X_i + X_i^*)).$$

9. d) Question adaptée au programme actuel : s est pris positif ou nul, afin que $h(s + x)$ soit définie pour tout $x \geq 0$. Pour un tel s , $h_s : x \mapsto h(s + x)$ est bornée et continue

sauf éventuellement en un nombre fini de points. La définition de la loi biaisée de X_i donne

$$E(h(s + X_i^*)) = \frac{1}{\mu_i} E(X_i h(s + X_i)).$$

Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans l'original :

$E(h(S_n - X_i + X_i^*)) = \frac{1}{\mu_i} E(X_i h(S_n))$. Les espérances du second membre existent car $|X_i h(S_n)| \leq C X_i$ si $|h| \leq C$. Ce résultat particulier permet de passer de l'identité à décalage fixe au décalage aléatoire $S_n - X_i$, sans introduire de théorie d'espérance conditionnelle.

9. e) En utilisant c), le résultat admis et $P(J = i) = \mu_i/\mu$, on obtient

$$E(h(T_n)) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\mu} \frac{1}{\mu_i} E(X_i h(S_n)) = \frac{1}{\mu} E\left(\sum_{i=1}^n X_i h(S_n)\right) = \frac{E(S_n h(S_n))}{E(S_n)}.$$

Chaque division est licite puisque les μ_i et μ sont strictement positifs. La linéarité porte sur une somme finie de variables intégrables.

9. f) La variable $T_n = S_n - X_J + X_J^*$ est positive. L'identité e) est valable pour toute fonction test h prévue par la définition et $E(S_n) > 0$. C'est exactement la définition de la loi de S_n biaisée par la taille. Ainsi T_n suit cette loi.

Troisième partie : Applications en statistique

10. a) i) Fixons des indices distincts $a_1, \dots, a_m$. La probabilité de tirer a_1 au premier rang vaut $1/n$. Une fois les $j - 1$ premiers indices fixés, a_j est encore disponible parmi $n - j + 1$ indices, et sa probabilité conditionnelle vaut $1/(n - j + 1)$. Par les probabilités composées,

$$P(S = (a_1, \dots, a_m)) = \frac{1}{n(n-1) \cdots (n-m+1)} = \frac{(n-m)!}{n!}.$$

La formule reste valable pour $m = 1$ et $m = n$, avec $0! = 1$.

10. a) ii) Pour obtenir un ensemble fixé A de cardinal m , on peut tirer ses éléments dans n'importe quel ordre. Il y a m choix pour le premier, $m - 1$ pour le deuxième, etc., soit $m!$ ordres possibles. Ces événements sont disjoints et ont la probabilité calculée en i). Ainsi

$$P(R = A) = m! \frac{(n - m)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{m}}.$$

Toutes les parties de cardinal m ont la même probabilité : R est uniforme sur $\mathcal{P}_m$.

10. b) Comme $0 \leq U < 1$, la variable $1 + \lfloor nU \rfloor$ prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Pour k dans cet ensemble,

$$[1 + \lfloor nU \rfloor = k] = \left[\frac{k - 1}{n} \leq U < \frac{k}{n} \right].$$

La longueur de cet intervalle vaut $1/n$. Par la loi uniforme de U , la probabilité est $1/n$, ce qui démontre la loi uniforme discrète annoncée.

10. c) Code adapté en Python. On applique exactement la construction de b) :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def Uniforme(n):
    return 1 + int(np.floor(n * rd.random()))
```

L'entrée satisfait $n \geq 1$. Le nombre aléatoire est dans $[0, 1[$; la partie entière va de 0 à $n - 1$ et l'ajout de 1 donne les entiers de 1 à n . La conversion `int` assure un entier Python utilisable comme indice après décalage.

10. d) Code adapté en Python. La fonction suivante utilise `Uniforme` définie ci-dessus :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def Uniforme(n):

    return 1 + int(np.floor(n * rd.random()))

def Selection(V):

    n = len(V)

    k = Uniforme(n) - 1

    x = V[k]

    W = V[:k] + V[k + 1:]

    return x, W
```

La variable k est uniforme sur les indices $0, \dots, n - 1$. Les éléments de V étant distincts, chacun est donc choisi avec probabilité $1/n$. Les tranches $V[:k]$ et $V[k+1:]$ contiennent respectivement les éléments avant et après la position choisie. Leur concaténation enlève exactement cet élément. La liste d'entrée n'est pas modifiée. Pour une liste à un élément, W est vide.

10. e) Code adapté en Python. Le programme complet, avec les fonctions dont il dépend, est :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def Uniforme(n):

    return 1 + int(np.floor(n * rd.random()))

def Selection(V):

    n = len(V)

    k = Uniforme(n) - 1

    x = V[k]
```

```
W = V[:k] + V[k + 1:]
return x, W
```

```
def Choix(m, n):
    V = list(range(1, n + 1))
    R = []
    for i in range(m):
        x, V = Selection(V)
        R.append(x)
    return R
```

Avant l'itération d'indice i , R contient les i indices déjà tirés et V contient les $n - i$ indices restants. Comme $i < m \leq n$, V est toujours non vide au moment de l'appel. `Selection` choisit uniformément l'indice suivant et le retire. Après m itérations, les m valeurs sont distinctes et sont tirées suivant la procédure de a). La liste conserve leur ordre de tirage ; l'ensemble de ses éléments est uniforme sur $\mathcal{P}_m$.

11. a) i) Les données sont fixes et $\mathcal{P}_m$ est fini. Comme R est uniforme, le transfert donne

$$E(X) = \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \bar{x}_A P(R = A) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \bar{x}_A.$$

11. a) ii) Une partie de cardinal m contenant i est obtenue en choisissant les $m - 1$ autres indices parmi les $n - 1$ indices différents de i . Il y en a $\binom{n-1}{m-1}$. Cette formule vaut aussi pour $m = 1$ et $m = n$.

11. a) iii) Dans la somme de gauche, la donnée x_i est comptée une fois pour chaque partie contenant i . Par ii), elle est donc comptée $\binom{n-1}{m-1}$ fois. En regroupant les termes de cette somme finie,

$$\sum_{A \in \mathcal{P}_m} \sum_{i \in A} x_i = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{m-1} x_i = \binom{n-1}{m-1} \sum_{i=1}^n x_i.$$

11. a) iv) On remplace chaque $\bar{x}_A$ par sa définition, puis on utilise iii) :

$$E(X) = \frac{1}{m \binom{n}{m}} \binom{n-1}{m-1} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Or $\binom{n-1}{m-1} / \binom{n}{m} = m/n$. Par conséquent,

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

L'égalité admise $E(Y) = \bar{y}$ se justifie de même en remplaçant chaque x_i par y_i .

11. a) v) Comme tous les x_i sont strictement positifs, $E(X) = \bar{x} > 0$. Ainsi

$$\theta = \frac{\sum_i y_i}{\sum_i x_i} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{E(Y)}{E(X)}.$$

11. b) Par définition, $\theta_R = \bar{y}_R / \bar{x}_R = Y/X$. La variable X est au moins égale à $\min_i x_i > 0$ et les valeurs de Y sont finies ; le quotient est borné sur l'ensemble fini des tirages. Son espérance existe et $E(\theta_R) = E(Y/X)$.

11. c) i) Méthode 1 — Inégalité fournie

On choisit $W = \sqrt{X}$ et $Z = 1/\sqrt{X}$. Ces variables sont strictement positives et bornées, puisque $0 < \min_i x_i \leq X \leq \max_i x_i$. Elles admettent donc un moment d'ordre 2.

Comme $WZ = 1$, l'inégalité donnée entraîne

$$1 \leq \sqrt{E(X)E(1/X)}.$$

En élevant au carré puis en divisant par $E(X) > 0$, on obtient $E(1/X) \geq 1/E(X)$.

Méthode 2 — Identité exacte de l'écart

Posons $a = E(X) > 0$. Toutes les variables qui suivent sont bornées. En développant le numérateur,

$$E\left(\frac{(X-a)^2}{X}\right) = E(X - 2a + a^2/X) = a^2 E(1/X) - a.$$

Par conséquent,

$$E(1/X) - \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} E\left(\frac{(X-a)^2}{X}\right) \geq 0.$$

La première méthode suit l'indication et illustre un choix utile de facteurs réciproques. La seconde mesure exactement l'écart et permet aussi de lire directement le cas d'égalité.

- 11.** c) ii) Avec les variables de la première méthode, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\sqrt{X} = \alpha/\sqrt{X}$ presque sûrement, c'est-à-dire $X = \alpha$ presque sûrement. Dans ce cas $E(X) = \alpha = \bar{x}$. Réciproquement, si $X = \bar{x}$ presque sûrement, alors $E(1/X) = 1/\bar{x} = 1/E(X)$.

On peut aussi utiliser l'identité de la seconde méthode : son membre positif est nul si et seulement si $(X - a)^2/X = 0$ presque sûrement. Ici les valeurs possibles sont en nombre fini et toutes les parties ont une probabilité positive, donc une seule valeur positive de ce carré rendrait l'espérance strictement positive. La même caractérisation en résulte.

- 11.** c) iii) Question adaptée au programme actuel : l'équivalence de l'original nécessite $m < n$; elle est fausse sans restriction lorsque $m = n$.

Supposons $m < n$ et X constante. Chaque partie $A \in \mathcal{P}_m$ a une probabilité strictement positive, donc toutes les moyennes $\bar{x}_A$ sont égales à $\bar{x}$. Fixons deux indices distincts i, j . On peut choisir une partie B de $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ de cardinal $m - 1$, puisque

$m - 1 \leq n - 2$. Les parties $B \cup \{i\}$ et $B \cup \{j\}$ ont même moyenne, d'où

$$\sum_{r \in B} x_r + x_i = \sum_{r \in B} x_r + x_j.$$

Ainsi $x_i = x_j$. Tous les x_i sont donc égaux à $\bar{x}$. Pour $m = 1$, on prend simplement $B = \emptyset$ et le raisonnement reste valable. La réciproque est immédiate par substitution : si tous les $x_i = \bar{x}$, toute moyenne de groupe vaut $\bar{x}$, donc X est constante et l'égalité de ii) s'applique.

Si $m = n$, le seul groupe est l'ensemble des clients. Alors $X = \bar{x}$ et $E(1/X) = 1/E(X)$ quelles que soient les valeurs des x_i ; il n'est pas nécessaire qu'elles soient égales. Cela inclut $n = m = 1$.

11. d) Par indépendance de X, Y , le lemme des coalitions donne l'indépendance de $1/X$ et Y . Les deux variables sont intégrables, donc

$$E(\theta_R) = E(Y/X) = E(Y)E(1/X) \geq \frac{E(Y)}{E(X)} = \theta.$$

Comme $E(Y) = \bar{y} > 0$, l'égalité équivaut exactement à celle de 11.c). Si $m < n$, elle a donc lieu si et seulement si tous les x_i sont égaux. Si $m = n$, $X = \bar{x}$ et $Y = \bar{y}$ sont constantes ; l'estimateur vaut toujours θ , donc l'égalité a toujours lieu.

Cette distinction corrige le même cas limite que dans c)iii). En général, le rapport des espérances ne peut pas être remplacé par l'espérance du rapport, ce qui explique le biais possible.

12. a) i) Chaque $P(J = i)$ est strictement positive puisque $x_i > 0$. Si $J = i$, l'événement $R = A$ est impossible lorsque $i \notin A$. Lorsque $i \in A$, il équivaut à $V = A \setminus \{i\}$. En appliquant les probabilités totales au système complet $([J = i])_{1 \leq i \leq n}$,

$$P(R = A) = \sum_{i \in A} P(J = i)P_{[J=i]}(V = A \setminus \{i\}).$$

12. a) ii) En utilisant le modèle conditionnel fourni,

$$P(R = A) = \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}} \frac{\sum_{i \in A} x_i}{\sum_{r=1}^n x_r} = \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}} \frac{m\bar{x}_A}{n\bar{x}}.$$

Comme $\binom{n-1}{m-1} = \frac{m}{n} \binom{n}{m}$, on en déduit

$$P(R = A) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}}.$$

Pour $m = n$, la seule partie a pour moyenne $\bar{x}$ et sa probabilité est 1, comme attendu.

Pour $m = 1$, la probabilité de choisir $\{i\}$ est

$$x_i / \sum_r x_r.$$

13. a) Les valeurs possibles de $\hat{\theta}_R$ sont finies et leurs dénominateurs strictement positifs.
Par transfert et 12.a)ii),

$$E(\hat{\theta}_R) = \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}_A} P(R = A) = \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}_A} \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}} = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}}.$$

Chaque $\bar{x}_A$ est non nul, ce qui justifie sa simplification.

13. b) L'identité de comptage de 11.a), avec les données y_i , donne

$$\sum_{A \in \mathcal{P}_m} \bar{y}_A = \binom{n}{m} \bar{y}.$$

La question a) entraîne donc

$$E(\hat{\theta}_R) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \theta.$$

La loi de tirage a changé entre les questions 11 et 13 : les groupes de moyenne $\bar{x}_A$ élevée sont davantage représentés, ce qui compense le dénominateur de l'estimateur.

L'estimateur est non biaisé au sens de la définition donnée dans le sujet, sans aucune hypothèse d'indépendance entre les moyennes du groupe.

Relevé des adaptations

1.c) L'unité du tirage est précisée comme une personne choisie uniformément dans la population des enfants dénombrée en 1.b), afin de rendre le modèle de population explicite.

2.d) L'hypothèse de moment d'ordre 2 de b) est rappelée pour garantir une espérance finie de X^* .

7.c) Question adaptée au programme actuel : seule l'identité particulière $E((X^*)^m) = E(X^{m+1})/E(X)$, avec existence du moment, est admise. La fonction $x \mapsto x^m$ n'est pas bornée ; la définition générale fournie dans l'original ne permettait pas son emploi direct sans justification supplémentaire.

8.c) La condition $E(X) > 0$ est explicitée pour que la loi biaisée soit définie.

9.c)i) Le signe négatif devant X_i^* dans l'original est remplacé par un signe positif, conformément à $T_n = S_n - X_J + X_J^*$.

9.d) Le décalage fixe est pris dans $[0, +\infty[$, domaine suffisant pour la suite et nécessaire pour que tous les arguments de h appartiennent à son domaine.

10.c) à 10.e) Code adapté en Python. Les indices commencent à zéro ; les listes, leurs tranches et la boucle `range(m)` préservent le tirage uniforme successif sans remise.

11. La définition du biais d'un estimateur est donnée dans le préambule de la troisième partie. En 11.c)iii), une indication de comparaison de deux groupes guide le comptage élémentaire. En 11.c)iii) et 11.d), l'équivalence avec l'égalité de tous les paiements est restreinte à $m < n$; le cas $m = n$, pour lequel le groupe est déterministe et l'estimateur exact, est traité séparément.