



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2018

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On s'intéresse à l'évolution d'une population de petits organismes, typiquement des insectes, pendant une saison reproductrice de durée maximale $T \in \mathbb{N}^*$. Les insectes vivent une unité de temps, au bout de laquelle ils meurent en pondant des œufs. Au moment du dépôt d'un œuf, un processus chimique, la diapause, peut arrêter sa maturation jusqu'à la saison suivante.

À chaque date t de la saison, une génération d'insectes s'éteint en déposant des œufs. Une proportion $p(t)$ de ces œufs se met immédiatement en diapause. Les autres éclosent avant la date $t + 1$, donnant naissance à la génération qui s'éteindra à cette date. À la fin de la saison, tous les organismes vivants meurent, sauf les œufs en diapause, à l'origine de la population de la saison suivante. On cherche une stratégie maximisant le nombre d'œufs en diapause accumulés à la fin de la saison.

La durée de la saison pourra être une variable aléatoire τ à valeurs dans $\{1, \dots, T\}$. L'événement $[\tau = t]$ signifie que la saison s'arrête à la date t . Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $E(Y)$ désigne l'espérance de Y lorsqu'elle existe.

I — Modèle de population saisonnière

On définit formellement l'évolution des œufs en diapause entre les dates 0 et T . On note $D(t)$ leur nombre à la date t : les œufs pondus à la date t qui entrent en diapause sont comptabilisés à la date $t + 1$. On note $N(t)$ le nombre moyen d'œufs produits à la date t , et $p(t)$ la proportion de ceux-ci qui entrent en diapause.

La date 0 est celle où les insectes issus des œufs en diapause de la saison précédente pondent $N(0)$ œufs. On suppose que $N(0)$ est un entier strictement positif, que tous les œufs de la saison précédente ont éclos et que $D(0) = 0$. On impose $0 < p(0) \leq 1$ et, pour $1 \leq t \leq T - 1$, $0 \leq p(t) \leq 1$.

À chaque date de la saison, un individu produit en moyenne α œufs, où $\alpha > 0$ est constant pendant toute la saison.

1. a) Montrer que, pour tout entier $t \in \{0, \dots, T - 1\}$,

$$D(t + 1) = D(t) + p(t)N(t).$$

1. b) Montrer que, pour tout entier $t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$N(t+1) = \alpha(1-p(t))N(t).$$

2. On suppose dans cette question que $\alpha \leq 1$.

2. a) Montrer que $N(t+1) \leq N(t)$ pour tout entier $t \in \{0, \dots, T-1\}$.

2. b) Montrer que $D(t+1) + N(t+1) \leq D(t) + N(t)$ pour tout entier $t \in \{0, \dots, T-1\}$.

2. c) Montrer que $D(t) + N(t) \leq N(0)$ pour tout entier $t \in \{0, \dots, T\}$.

2. d) Montrer que $D(t) \leq N(0)$ pour tout entier $t \in \{0, \dots, T\}$.

2. e) On suppose que $p(0) = 1$.

2. e) i) Montrer que $N(t) = 0$ pour tout entier $t \in \{1, \dots, T\}$.

2. e) ii) Montrer que $D(t) = N(0)$ pour tout entier $t \in \{1, \dots, T\}$.

2. e) iii) En déduire que, lorsque $\alpha \leq 1$, une meilleure stratégie consiste à placer immédiatement en diapause les $N(0)$ œufs produits à la date 0.

3. On suppose désormais $\alpha > 1$, jusqu'à la fin du problème. On introduit τ à valeurs dans $\{1, \dots, T\}$, représentant la date de fin de saison, et on suppose $P(\tau = t) > 0$ pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$.

3. a) Montrer que $P(\tau \geq t) > 0$ pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$. On définit alors

$$H(t) = P_{[\tau \geq t]}(\tau = t).$$

3. b) Montrer que $H(t) = \frac{P(\tau = t)}{P(\tau \geq t)}$.

3. c) Montrer que $H(T) = 1$.
3. d) Calculer $H(t)$ lorsque τ suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, T\}$.
3. e) i) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_T$ tels que $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_T = 1$. On pose $\lambda_0 = 0, q_1 = \lambda_1, q_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \dots, q_T = \lambda_T - \lambda_{T-1}$. Montrer que $(q_i)_{1 \leq i \leq T}$ définit une loi de probabilité sur $\{1, \dots, T\}$.
3. e) ii) Calculer $H(t)$ si τ suit cette loi.
3. e) iii) On suppose $T \geq 2$ et $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \lambda_n - \lambda_{n-1}$ pour tout entier $n \in \{1, \dots, T-1\}$. Montrer que la fonction $t \mapsto H(t)$ est croissante sur $\{1, \dots, T\}$.

On suppose désormais que $t \mapsto H(t)$ est croissante. Le but est de trouver une stratégie maximisant $E(\ln D(\tau))$. On commence par un exemple simple.

4. On suppose $T = 2, H(1) = \frac{1}{2}, H(2) = 1$ et $\alpha = 4$.
4. a) i) Déterminer $P(\tau = 1)$.
4. a) ii) Quelle est la loi de τ ?
4. b) Montrer que, pour $D(1)$ et $N(1)$ donnés, $D(2)$ est maximum pour $p(1) = 1$.
4. c) On suppose $p(1) = 1$. Montrer que

$$E(\ln D(\tau)) = \frac{1}{2} \ln((4 - 3p(0))N(0)) + \frac{1}{2} \ln(p(0)N(0)).$$

4. d) Construire le tableau de variations sur $]0, 1]$ de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln((4 - 3x)N(0)) + \frac{1}{2} \ln(N(0)x).$$

4. e) Déterminer $p^*(0)$ qui maximise $E(\ln D(\tau))$.

II — Transformation du problème

Toute somme dont l'ensemble des indices est vide vaut 0, et tout produit dont l'ensemble des indices est vide vaut 1. En particulier, si h est définie sur $\{0, \dots, T\}$,

$$\sum_{t=1}^0 h(t) = 0.$$

5. Montrer que $D(t) + N(t) > 0$ pour tout $t \in \{0, \dots, T\}$. On pose

$$X(t) = \frac{D(t)}{D(t) + N(t)}.$$

6. Montrer que, pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$,

$$X(t+1) = \frac{p(t) + (1-p(t))X(t)}{p(t) + \alpha(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))X(t)}.$$

7. Soit $\xi \in [0, 1]$ fixé. Pour $x \in [0, 1]$, on pose

$$\psi_\xi(x) = \frac{x + (1-x)\xi}{x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi}.$$

7. a) Montrer que ψ_ξ est croissante sur $[0, 1]$.

7. b) Calculer $\psi_\xi(1)$.

7. c) i) Calculer $\psi_\xi(0)$. On pose désormais $A(\xi) = \psi_\xi(0)$.

7. c) ii) Montrer que $A(X(t)) \leq X(t+1) \leq 1$ pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$.

7. c) iii) Montrer que $\xi \mapsto A(\xi)$ est croissante sur $[0, 1]$.

8. Justifier l'égalité de variables aléatoires, écrite sous forme de produit télescopique :

$$D(\tau) = N(0) \frac{D(1)}{N(0)} \prod_{t=1}^{\tau-1} \frac{D(t+1)}{D(t)}.$$

On pose $\widehat{R}(0) = \ln \frac{D(1)}{N(0)}$ et $\widehat{R}(t) = \ln \frac{D(t+1)}{D(t)}$ pour $1 \leq t \leq T-1$.

9. a) Montrer que

$$E(\ln D(\tau)) = \ln N(0) + E \left(\widehat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \widehat{R}(t) \right).$$

9. b) Montrer que $\frac{D(1)}{N(0)} = \frac{\alpha X(1)}{1 + (\alpha - 1)X(1)}$.

9. c) Montrer que, pour $1 \leq t \leq T-1$,

$$\frac{D(t+1)}{D(t)} = \frac{\alpha X(t+1)}{X(t)[1 + (\alpha - 1)X(t+1)]}.$$

Pour $x, y > 0$, on pose $u(x, y) = \ln \alpha - \ln x + \ln y - \ln(1 + (\alpha - 1)y)$.

9. d) Montrer que $\widehat{R}(0) = u(1, X(1))$.

9. e) Montrer que $\widehat{R}(t) = u(X(t), X(t+1))$ pour $1 \leq t \leq T-1$.

9. f) Conclure que

$$E(\ln D(\tau)) = \ln N(0) + E \left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right).$$

On veut donc choisir, à chaque date $t \in \{1, \dots, T-1\}$, la valeur $X(t+1)$ dans $[A(X(t)), 1]$ afin de maximiser la dernière espérance. Le choix initial vérifie $X(1) \in]0, 1]$.

III — Programmation dynamique

On expose les deux premières étapes de la méthode de programmation dynamique pour ce problème. Les valeurs déjà connues et les choix comparés à une étape sont traités comme des constantes sur l'événement où cette étape est atteinte ; l'incertitude restante porte sur la fin de la saison.

10. Soit B un événement. On note $\mathbf{1}_B$ la variable aléatoire définie par $\mathbf{1}_B(\omega) = 1$ si $\omega \in B$, et $\mathbf{1}_B(\omega) = 0$ sinon.

10. a) Déterminer la loi de $\mathbf{1}_B$.

10. b) Soient B, C deux événements. Montrer que $\mathbf{1}_{B \cap C} = \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C$.

10. c) On suppose $0 < P(B) < 1$. Pour toute variable aléatoire Y prenant un nombre fini de valeurs, on définit la variable aléatoire

$$\mathcal{E}_B(Y) = \frac{E(Y\mathbf{1}_B)}{P(B)}\mathbf{1}_B + \frac{E(Y\mathbf{1}_{\overline{B}})}{P(\overline{B})}\mathbf{1}_{\overline{B}},$$

où $\overline{B}$ est l'événement contraire de B .

10. c) i) Pour Y, Z prenant un nombre fini de valeurs, montrer que $\mathcal{E}_B(Y + Z) = \mathcal{E}_B(Y) + \mathcal{E}_B(Z)$.

10. c) ii) Montrer que $E(\mathcal{E}_B(Y)) = E(Y)$.

10. c) iii) Montrer que $\mathcal{E}_B(Y\mathbf{1}_B) = \mathcal{E}_B(Y)\mathbf{1}_B$.

11. Dans cette question, $T \geq 2$. Quand $[\tau = T]$ est réalisé, $X(1), \dots, X(T-1)$ sont connus. En posant $x = X(T-1)$, le meilleur choix est de prendre pour $X(T)$ la

valeur $y^*(x, T-1) \in [A(x), 1]$ maximisant $u(x, y)$.

11. a) Montrer que $y^*(x, T-1) = 1$.

11. b) Montrer que $u(x, 1) = -\ln x$.

12. On suppose $T \geq 3$. Quand $[\tau \geq T-1]$ est réalisé, $X(1), \dots, X(T-2)$ sont connus. La stratégie consiste à choisir $X(T-1)$ et $X(T)$ afin de maximiser

$$\mathcal{E}_{[\tau \geq T-1]} \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right)$$

sur cet événement. Sous la probabilité conditionnelle $P_{[\tau \geq T-1]}$, la variable τ prend les valeurs $T-1$ et T avec probabilités respectives $P_{[\tau \geq T-1]}(\tau = T-1)$ et $P_{[\tau \geq T-1]}(\tau = T)$.

12. a) Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{[\tau \geq T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) &= \mathbf{1}_{[\tau \geq T-1]} u(X(T-2), X(T-1)) \\ &+ \mathbf{1}_{[\tau = T]} u(X(T-1), X(T)). \end{aligned}$$

12. b) Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{[\tau \geq T-1]} \mathcal{E}_{[\tau \geq T-1]} \left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right) \\ = \mathcal{E}_{[\tau \geq T-1]} \left(\mathbf{1}_{[\tau \geq T-1]} u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbf{1}_{[\tau = T]} u(X(T-1), X(T)) \right). \end{aligned}$$

12. c) Montrer que le membre de droite précédent est égal à

$$u(X(T-2), X(T-1))\mathbf{1}_{[\tau \geq T-1]} + \frac{P(\tau = T)}{P(\tau \geq T-1)}u(X(T-1), X(T))\mathbf{1}_{[\tau \geq T-1]}.$$

12. d) On suppose $X(T-1)$ donné.

12. d) i) Montrer que le meilleur choix pour $X(T)$ est 1.

12. d) ii) Montrer que $u(X(T-1), X(T)) = -\ln X(T-1)$ pour ce choix.

12. e) Montrer que $P_{[\tau \geq T-1]}(\tau = T) = 1 - H(T-1)$.

On veut maintenant choisir la stratégie optimale à la date $T-2$.

12. f) Montrer qu'on doit choisir pour $X(T-1)$ la valeur

$$y^*(X(T-2), T-2) \in [A(X(T-2)), 1] \text{ qui maximise}$$

$$\phi(y) = u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1)) \ln y.$$

12. g) Calculer $\phi'(y)$.

12. h) Construire le tableau de variations de ϕ dans le cas où

$$\frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leq 1.$$

12. i) Construire le tableau de variations de ϕ dans le cas où

$$\frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geq 1.$$

12. j) Donner la valeur de $y^*(X(T-2), T-2)$.