



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2018

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

I — Modèle de population saisonnière

1. a) Entre les dates t et $t + 1$, les $D(t)$ œufs déjà en diapause sont conservés et $p(t)N(t)$ nouveaux œufs entrent en diapause. Ainsi

$$D(t + 1) = D(t) + p(t)N(t).$$

Tous ces termes sont positifs ou nuls ; en particulier, D est croissante.

1. b) Parmi les $N(t)$ œufs produits, $(1 - p(t))N(t)$ éclosent et donnent les insectes de la génération suivante. Chacun produit en moyenne α œufs. Le modèle donne donc

$$N(t + 1) = \alpha(1 - p(t))N(t).$$

Par récurrence, $N(t) \geq 0$ à toutes les dates. Question adaptée au programme actuel : le domaine des stratégies autorise $p(t) = 0$ pour $t \geq 1$, tout en maintenant $p(0) > 0$. Cela rend accessibles les bornes des contraintes utilisées ensuite sans compromettre l'existence des logarithmes.

2. a) Ici $0 < \alpha \leq 1$ et $0 \leq 1 - p(t) \leq 1$. Ainsi $\alpha(1 - p(t)) \leq 1$. En multipliant par $N(t) \geq 0$, on obtient $N(t + 1) \leq N(t)$.

2. b) Les deux relations de la question 1 donnent

$$D(t + 1) + N(t + 1) = D(t) + [p(t) + \alpha(1 - p(t))]N(t).$$

Or $p(t) + \alpha(1 - p(t)) \leq p(t) + 1 - p(t) = 1$. La positivité de $N(t)$ donne donc $D(t + 1) + N(t + 1) \leq D(t) + N(t)$.

2. c) La suite $t \mapsto D(t) + N(t)$ est décroissante par 2.b). Son terme initial est $D(0) + N(0) = N(0)$. Par conséquent, pour $0 \leq t \leq T$,

$$D(t) + N(t) \leq N(0).$$

2. d) Comme $N(t) \geq 0$, on a $D(t) \leq D(t) + N(t)$. La question précédente donne donc $D(t) \leq N(0)$.

2. e) i) Si $p(0) = 1$, la relation 1.b) donne $N(1) = 0$. Dès qu'un terme $N(t)$ est nul, $N(t+1) = \alpha(1 - p(t))N(t) = 0$. Une récurrence donne $N(t) = 0$ pour $1 \leq t \leq T$.
2. e) ii) La relation 1.a) donne $D(1) = D(0) + N(0) = N(0)$. Pour $t \geq 1$, on vient d'établir $N(t) = 0$, donc $D(t+1) = D(t)$. Ainsi $D(t) = N(0)$ pour $1 \leq t \leq T$.
2. e) iii) Toute stratégie satisfait $D(t) \leq N(0)$ par 2.d), alors que $p(0) = 1$ atteint cette borne à toute date de fin de saison possible. Placer immédiatement tous les œufs en diapause est donc une stratégie optimale lorsque $\alpha \leq 1$. Cela n'affirme pas l'unicité d'une stratégie optimale.

3. a) Pour $1 \leq t \leq T$, l'inclusion $[\tau = t] \subset [\tau \geq t]$ implique

$$P(\tau \geq t) \geq P(\tau = t) > 0.$$

La probabilité conditionnelle définissant $H(t)$ est donc bien définie.

3. b) Puisque $[\tau = t] \cap [\tau \geq t] = [\tau = t]$, la définition d'une probabilité conditionnelle donne

$$H(t) = \frac{P([\tau = t] \cap [\tau \geq t])}{P(\tau \geq t)} = \frac{P(\tau = t)}{P(\tau \geq t)}.$$

3. c) Comme $\tau \leq T$, les événements $[\tau \geq T]$ et $[\tau = T]$ sont identiques et de probabilité strictement positive. Ainsi $H(T) = 1$.

3. d) Dans le cas uniforme, $P(\tau = t) = 1/T$ et $P(\tau \geq t) = (T - t + 1)/T$. Le quotient de 3.b) donne

$$H(t) = \frac{1}{T - t + 1}.$$

3. e) i) Pour tout i , $q_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} > 0$. La somme est télescopique :

$$\sum_{i=1}^T q_i = \sum_{i=1}^T (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = \lambda_T - \lambda_0 = 1.$$

Les q_i sont donc les probabilités d'une loi sur $\{1, \dots, T\}$.

3. e) ii) Si $P(\tau = i) = q_i$, alors

$$P(\tau \geq t) = \sum_{i=t}^T q_i = 1 - \lambda_{t-1} > 0.$$

Ainsi $H(t) = \frac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{1 - \lambda_{t-1}} = \frac{q_t}{1 - \lambda_{t-1}}.$

3. e) iii) Pour $1 \leq t \leq T - 1$, l'hypothèse donne $q_{t+1} \geq q_t > 0$. De plus,

$0 < 1 - \lambda_t < 1 - \lambda_{t-1}$. On peut donc comparer successivement les quotients :

$$H(t+1) = \frac{q_{t+1}}{1 - \lambda_t} \geq \frac{q_t}{1 - \lambda_t} \geq \frac{q_t}{1 - \lambda_{t-1}} = H(t).$$

La fonction H est croissante. En fait, avec les hypothèses strictes sur les λ_i , la seconde comparaison est stricte.

4. a) i) Puisque $P(\tau \geq 1) = 1$, on a $P(\tau = 1) = H(1) = 1/2$.

4. a) ii) La variable τ prend seulement les valeurs 1, 2; leurs probabilités ont pour somme 1. Ainsi $P(\tau = 2) = 1/2$, et τ suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

4. b) Pour $D(1), N(1)$ donnés, $D(2) = D(1) + p(1)N(1)$ est une fonction affine de $p(1)$ de pente $N(1) \geq 0$. Son maximum sur $[0, 1]$ est donc atteint en $p(1) = 1$. Si $N(1) = 0$, tous les choix donnent le même résultat, et $p(1) = 1$ reste optimal.

4. c) Écrivons $p = p(0) \in]0, 1]$. Les relations du modèle donnent $D(1) = pN(0)$,
 $N(1) = 4(1 - p)N(0)$, puis, pour $p(1) = 1$,

$$D(2) = D(1) + N(1) = (4 - 3p)N(0).$$

Ces deux valeurs sont strictement positives puisque $p > 0$, $4 - 3p \geq 1$ et $N(0) > 0$. La variable $\ln D(\tau)$ prend donc deux valeurs réelles et possède une espérance. Par la loi de τ ,

$$E(\ln D(\tau)) = \frac{1}{2} \ln(pN(0)) + \frac{1}{2} \ln((4-3p)N(0)).$$

4. d) La fonction φ est dérivable sur $]0, 1]$, avec dérivée à gauche en 1. Pour $0 < x \leq 1$,

$$\varphi'(x) = -\frac{3}{2(4-3x)} + \frac{1}{2x} = \frac{2-3x}{x(4-3x)}.$$

Son dénominateur est strictement positif. La dérivée est donc positive pour $x < 2/3$, nulle pour $x = 2/3$ et négative pour $x > 2/3$. De plus, lorsque $x \rightarrow 0^+$, le terme $\ln(N(0)x)$ tend vers $-\infty$, tandis que l'autre logarithme a une limite finie. Ainsi $\varphi(x) \rightarrow -\infty$.

x	0^+	$2/3$	1
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$-\infty$	maximum	$\ln N(0)$

La fonction croît jusqu'à $2/3$, puis décroît. Sa valeur maximale est $\varphi(2/3) = \ln N(0) + \frac{1}{2} \ln(4/3)$.

4. e) Méthode 1 — Utiliser les variations

La question 4.d) établit que φ possède sur $]0, 1]$ un maximum unique en $2/3$. Comme la question 4.c) identifie l'objectif à $\varphi(p(0))$, on obtient $p^*(0) = 2/3$, avec $p^*(1) = 1$.

Méthode 2 — Maximiser un produit

Pour $p \in]0, 1]$, l'identité des logarithmes donne

$$\varphi(p) = \ln N(0) + \frac{1}{2} \ln(p(4-3p)).$$

Le logarithme est strictement croissant et son argument est positif. Il suffit donc de maximiser $p(4-3p)$. Or

$$p(4 - 3p) = \frac{4}{3} - 3\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{3},$$

avec égalité exactement lorsque $p = 2/3$, valeur admissible. On retrouve le maximum unique $p^*(0) = 2/3$.

La première méthode s'appuie sur l'étude demandée ; la seconde transforme une somme de logarithmes en un trinôme, ce qui permet une optimisation sans dérivation supplémentaire.

II — Transformation du problème

5. Posons $S(t) = D(t) + N(t)$. La question 1 donne, avec $\alpha > 1$,

$$S(t+1) - S(t) = (\alpha - 1)(1 - p(t))N(t) \geq 0.$$

Ainsi $S(t) \geq S(0) = N(0) > 0$, ce qui justifie la définition de $X(t)$. Comme $0 \leq D(t) \leq S(t)$, on a $0 \leq X(t) \leq 1$ et $X(0) = 0$.

Pour les logarithmes qui suivent, on note aussi que $D(1) = p(0)N(0) > 0$ et que D est croissante ; donc $D(t) > 0$ et $X(t) > 0$ pour $t \geq 1$. Le modèle définit une trajectoire à un nombre fini de dates ; les valeurs $\ln D(t)$ sont réelles, et $\ln D(\tau)$ prend un nombre fini de valeurs. Son espérance existe.

6. On a $D(t) = S(t)X(t)$ et $N(t) = S(t)(1 - X(t))$. La question 1.a) donne donc

$$D(t+1) = S(t)[X(t) + p(t)(1 - X(t))] = S(t)[p(t) + (1 - p(t))X(t)].$$

De même, $N(t+1) = \alpha(1 - p(t))S(t)(1 - X(t))$. En additionnant, puis en divisant par $S(t) > 0$,

$$\frac{S(t+1)}{S(t)} = p(t) + \alpha(1 - p(t)) + (1 - \alpha)(1 - p(t))X(t).$$

Ce dernier terme est strictement positif par la question 5. Le quotient $D(t+1)/S(t+1)$

donne alors exactement

$$X(t+1) = \frac{p(t) + (1-p(t))X(t)}{p(t) + \alpha(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))X(t)}.$$

7. a) Fixons $\xi \in [0, 1]$ et notons $a = \alpha - 1 > 0$. Le dénominateur de $\psi_\xi(x)$ s'écrit

$$d_\xi(x) = x + (1-x)(\alpha - a\xi).$$

Puisque $1 \leq \alpha - a\xi \leq \alpha$, on a $d_\xi(x) \geq 1$ sur $[0, 1]$. La fonction est donc continue sur ce segment et dérivable sur son intérieur. Avec le numérateur $\xi + (1-\xi)x$ et

$d_\xi(x) = \alpha - a\xi - a(1-\xi)x$, la dérivée du quotient vaut

$$\psi'_\xi(x) = \frac{(1-\xi)(\alpha - a\xi) + a\xi(1-\xi)}{d_\xi(x)^2} = \frac{\alpha(1-\xi)}{d_\xi(x)^2} \geq 0.$$

La fonction est donc croissante sur $[0, 1]$. Elle est strictement croissante si $\xi < 1$ et constante égale à 1 si $\xi = 1$.

7. b) En remplaçant x par 1, on obtient $\psi_\xi(1) = 1/1 = 1$.

7. c) i) En remplaçant x par 0, on obtient

$$A(\xi) = \psi_\xi(0) = \frac{\xi}{\alpha + (1-\alpha)\xi} = \frac{\xi}{\alpha - (\alpha-1)\xi}.$$

Le dénominateur appartient à $[1, \alpha]$ et ne s'annule donc pas.

7. c) ii) La question 6 s'écrit $X(t+1) = \psi_{X(t)}(p(t))$. Comme $p(t) \in [0, 1]$, la croissance de $\psi_{X(t)}$ donne

$$A(X(t)) = \psi_{X(t)}(0) \leq \psi_{X(t)}(p(t)) \leq \psi_{X(t)}(1) = 1.$$

Question adaptée au programme actuel : autoriser $p(t) = 0$ à partir de $t = 1$ rend la borne inférieure effectivement accessible. Si $X(t) < 1$, la continuité et la stricte croissance de $\psi_{X(t)}$ montrent que chaque valeur de $[A(X(t)), 1]$ est accessible. Si $X(t) = 1$, cet intervalle se réduit à $\{1\}$ et $X(t+1) = 1$. À la date initiale, $X(0) = 0$ et $p(0) > 0$ donnent précisément $X(1) \in]0, 1]$.

7. c) iii) Le dénominateur de A est strictement positif sur $[0, 1]$. La dérivation donne

$$A'(\xi) = \frac{\alpha - (\alpha - 1)\xi + (\alpha - 1)\xi}{[\alpha - (\alpha - 1)\xi]^2} = \frac{\alpha}{[\alpha - (\alpha - 1)\xi]^2} > 0.$$

Ainsi A est strictement croissante sur $[0, 1]$, avec $A(0) = 0$ et $A(1) = 1$.

8. Pour une valeur $\tau = k \geq 2$, les facteurs intermédiaires s'annulent dans le produit :

$$N(0) \frac{D(1)}{N(0)} \prod_{t=1}^{k-1} \frac{D(t+1)}{D(t)} = D(1) \frac{D(2)}{D(1)} \cdots \frac{D(k)}{D(k-1)} = D(k).$$

Toutes les divisions sont légitimes puisque $N(0) > 0$ et $D(t) > 0$ pour $t \geq 1$. Pour $k = 1$, le produit est vide et vaut 1 ; le membre de droite vaut donc aussi $D(1)$. L'égalité est ainsi vraie pour toutes les valeurs de τ .

Question adaptée au programme actuel : le produit explicite et la convention du produit vide rendent la formule non ambiguë lorsque $\tau = 1$, sans faire intervenir $D(0)$ au dénominateur.

9. a) Les facteurs du produit de la question 8 sont strictement positifs. En prenant leur logarithme, on obtient l'égalité de variables aléatoires

$$\ln D(\tau) = \ln N(0) + \widehat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \widehat{R}(t).$$

La somme prend un nombre fini de valeurs réelles ; toutes les espérances existent. En prenant l'espérance et en utilisant sa linéarité, on obtient l'identité demandée.

9. b) Posons $p = p(0)$. On sait que $D(1) = pN(0)$ et $N(1) = \alpha(1 - p)N(0)$. Ainsi

$$X(1) = \frac{p}{p + \alpha(1 - p)} = \frac{p}{\alpha - (\alpha - 1)p}.$$

En multipliant par le dénominateur, puis en regroupant les termes en p ,

$$\alpha X(1) = p[1 + (\alpha - 1)X(1)].$$

Le crochet est strictement positif. Comme $D(1)/N(0) = p$, on obtient

$$\frac{D(1)}{N(0)} = \frac{\alpha X(1)}{1 + (\alpha - 1)X(1)}.$$

9. c) Les récurrences de la question 1 donnent une identité utile :

$$S(t+1) + (\alpha - 1)D(t+1) = \alpha D(t) + \alpha N(t) = \alpha S(t).$$

En effet, le membre de gauche est $\alpha D(t+1) + N(t+1)$, et les termes contenant $p(t)N(t)$ se regroupent en $\alpha N(t)$. Puisque $D(t+1) = X(t+1)S(t+1)$, on en déduit

$$\frac{S(t+1)}{S(t)} = \frac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)X(t+1)}.$$

Pour $t \geq 1$, $D(t) = X(t)S(t) > 0$. On peut donc écrire

$$\frac{D(t+1)}{D(t)} = \frac{X(t+1)}{X(t)} \frac{S(t+1)}{S(t)} = \frac{\alpha X(t+1)}{X(t)[1 + (\alpha - 1)X(t+1)]}.$$

9. d) La formule de 9.b) est une égalité entre nombres strictement positifs. Son logarithme donne

$$\widehat{R}(0) = \ln \alpha + \ln X(1) - \ln(1 + (\alpha - 1)X(1)) = u(1, X(1)),$$

puisque $\ln 1 = 0$.

9. e) Pour $t \geq 1$, les deux nombres $X(t)$, $X(t+1)$ sont strictement positifs. Le logarithme de l'égalité de 9.c) donne

$$\widehat{R}(t) = \ln \alpha - \ln X(t) + \ln X(t+1) - \ln(1 + (\alpha - 1)X(t+1)) = u(X(t), X(t+1)).$$

9. f) On remplace $\widehat{R}(0)$ et les $\widehat{R}(t)$ dans l'égalité de 9.a). Il vient

$$E(\ln D(\tau)) = \ln N(0) + E \left(u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \right).$$

Le premier terme $\ln N(0)$ ne dépend pas de la stratégie. Maximiser l'espérance initiale revient donc à maximiser la dernière espérance sous les contraintes d'accessibilité établies en 7.c). Les termes de cette expression sont bien réels et intégrables, comme expliqué en 5 et 9.a).

III — Programmation dynamique

10. a) La variable $\mathbf{1}_B$ prend les valeurs 1 et 0, avec probabilités $P(B)$ et $1 - P(B)$. C'est donc une variable de Bernoulli de paramètre $P(B)$, y compris les cas limites $P(B) = 0$ ou 1, où elle est presque sûrement constante. Son espérance vaut $E(\mathbf{1}_B) = P(B)$.

10. b) Pour un résultat ω , le produit $\mathbf{1}_B(\omega)\mathbf{1}_C(\omega)$ vaut 1 exactement si ω appartient à la fois à B et à C , donc à $B \cap C$. Sinon il vaut 0. On a donc, point par point, $\mathbf{1}_{B \cap C} = \mathbf{1}_B \mathbf{1}_C$.

10. c) i) Les variables concernées sont à valeurs finies ; leurs espérances et celles de leurs produits par une indicatrice existent. Par linéarité,

$$E((Y + Z)\mathbf{1}_B) = E(Y\mathbf{1}_B) + E(Z\mathbf{1}_B),$$

et la même égalité vaut pour $\overline{B}$. En remplaçant les deux coefficients de la définition de $\mathcal{E}_B(Y + Z)$, on obtient $\mathcal{E}_B(Y + Z) = \mathcal{E}_B(Y) + \mathcal{E}_B(Z)$.

Il s'agit seulement du calcul de la variable explicitement définie dans l'énoncé, sans recours à un résultat général d'espérance conditionnelle.

10. c) ii) Les deux coefficients de $\mathcal{E}_B(Y)$ sont des constantes réelles. La formule de 10.a) et la linéarité donnent

$$E(\mathcal{E}_B(Y)) = \frac{E(Y\mathbf{1}_B)}{P(B)}P(B) + \frac{E(Y\mathbf{1}_{\overline{B}})}{P(\overline{B})}P(\overline{B}).$$

Les dénominateurs sont non nuls par l'hypothèse $0 < P(B) < 1$. Après simplification, on obtient

$$E(\mathcal{E}_B(Y)) = E(Y(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_{\overline{B}})) = E(Y),$$

puisque les événements B et $\overline{B}$ forment une partition de Ω .

10. c) iii) Les indicatrices satisfont $\mathbf{1}_B^2 = \mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\overline{B}} = 0$. La définition donne donc

$$\mathcal{E}_B(Y\mathbf{1}_B) = \frac{E(Y\mathbf{1}_B)}{P(B)}\mathbf{1}_B.$$

En multipliant la définition de $\mathcal{E}_B(Y)$ par $\mathbf{1}_B$, son second terme disparaît et le premier reste inchangé. On retrouve exactement $\mathcal{E}_B(Y)\mathbf{1}_B$, d'où l'égalité demandée.

11. a) On a $x = X(T-1) \in]0, 1]$ et $A(x) \in]0, 1]$. Pour $y > 0$, la fonction $y \mapsto u(x, y)$ est dérivable et

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{\alpha - 1}{1 + (\alpha - 1)y} = \frac{1}{y[1 + (\alpha - 1)y]} > 0.$$

Elle est donc strictement croissante en y . Son maximum sur le segment admissible $[A(x), 1]$ est atteint en $y = 1$; ainsi $y^*(x, T-1) = 1$. Si $x = 1$, le segment admissible est réduit à $\{1\}$, ce qui donne la même conclusion.

Question adaptée au programme actuel : $T \geq 2$ est précisé pour que $X(T-1) > 0$ et les logarithmes utilisés ici soient définis. La précision de la partie III signifie qu'à cette étape on optimise en une seule variable réelle, l'état x étant connu.

11. b) Par définition de u ,

$$u(x, 1) = \ln \alpha - \ln x + \ln 1 - \ln(1 + \alpha - 1) = \ln \alpha - \ln x - \ln \alpha = -\ln x.$$

12. a) Posons $B = [\tau \geq T - 1]$, $C = [\tau = T]$, et

$$W = \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)).$$

Sur $[\tau = T - 1]$, la somme contient seulement le terme d'indice $T - 2$. Sur C , elle contient les deux termes d'indices $T - 2$ et $T - 1$. Sur $\overline{B}$, les deux membres de l'identité demandée sont nuls après multiplication par leurs indicatrices. On a donc bien

$$\mathbf{1}_B W = \mathbf{1}_B u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbf{1}_C u(X(T-1), X(T)).$$

Question adaptée au programme actuel : $T \geq 3$ assure que $X(T-2) > 0$, donc que tous les logarithmes de cette étape sont définis. La convention générale des sommes vides couvre les cas où la saison s'est arrêtée avant cette étape.

12. b) On a $0 < P(B) < 1$: la probabilité est positive puisque $P(\tau = T) > 0$, et strictement inférieure à 1 puisque $T \geq 3$ et $P(\tau = 1) > 0$. La variable W prend un nombre fini de valeurs. La propriété 10.c) iii) donne donc

$$\mathbf{1}_B \mathcal{E}_B(W) = \mathcal{E}_B(\mathbf{1}_B W).$$

Il suffit maintenant de remplacer $\mathbf{1}_B W$ par l'expression établie en 12.a), ce qui donne exactement l'égalité demandée.

12. c) Écrivons $x = X(T-2)$, $y = X(T-1)$ et $z = X(T)$. À cette étape, l'état connu et les choix comparés sont constants sur B , comme précisé dans le sujet. Posons $f = u(x, y)$ et $g = u(y, z)$. Ces valeurs sont réelles et $C \subset B$.

Pour $Y = f\mathbf{1}_B + g\mathbf{1}_C$, on a $Y\mathbf{1}_B = Y$ et $Y\mathbf{1}_{\overline{B}} = 0$. De plus,

$$E(Y) = fP(B) + gP(C).$$

La définition explicite de $\mathcal{E}_B$ donne par conséquent

$$\mathcal{E}_B(Y) = \left(f + \frac{P(C)}{P(B)} g \right) \mathbf{1}_B,$$

qui est l'expression demandée. Question adaptée au programme actuel : la précision sur les valeurs connues et les choix constants sur B rend cette extraction des coefficients rigoureuse. On n'extrait pas une variable aléatoire arbitraire d'une espérance.

12. d) i) Pour x, y donnés, le seul terme dépendant de $z = X(T)$ dans l'expression de 12.c) est $[P(C)/P(B)]u(y, z)$ sur B . Son coefficient est strictement positif. Par 11.a), $z \mapsto u(y, z)$ est strictement croissante ; la meilleure valeur admissible est donc $z = 1$.

12. d) ii) Pour ce choix, la question 11.b) donne directement
 $u(X(T-1), X(T)) = u(y, 1) = -\ln y = -\ln X(T-1)$.

12. e) Sur B , la variable τ prend uniquement les valeurs $T-1$ et T . Les événements correspondants forment un système complet sous la probabilité conditionnelle P_B . Ainsi

$$P_B(\tau = T) = 1 - P_B(\tau = T-1) = 1 - H(T-1).$$

Comme les deux valeurs ont une probabilité strictement positive, $0 < H(T-1) < 1$.

12. f) Sur B , les questions 12.c), 12.d) et 12.e) réduisent l'objectif à

$$u(x, y) - (1 - H(T-1)) \ln y,$$

où $x = X(T-2)$ est fixé et $y = X(T-1) \in [A(x), 1]$. Les termes déjà accumulés avant la date $T-2$ sont connus et ne dépendent plus de ce choix. Il faut donc maximiser exactement la fonction ϕ donnée dans le sujet sur ce segment.

12. g) Posons $a = \alpha - 1 > 0$ et $h = H(T-1) \in]0, 1[$. Pour $x = X(T-2) > 0$ fixé et $y > 0$,

$$\phi(y) = \ln \alpha - \ln x + h \ln y - \ln(1 + ay).$$

La dérivée vaut donc

$$\phi'(y) = \frac{h}{y} - \frac{a}{1+ay} = \frac{h - a(1-h)y}{y(1+ay)}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Avec $r = \frac{h}{a(1-h)} > 0$, la dérivée est positive pour $y < r$, nulle en r et négative pour $y > r$.

12. h) On suppose $r \leq 1$. Lorsque $y \rightarrow 0^+$, le terme $h \ln y$ tend vers $-\infty$ tandis que les autres termes ont une limite finie ; ainsi $\phi(y) \rightarrow -\infty$. La fonction croît jusqu'à r , puis décroît jusqu'à 1 si $r < 1$.

y	0^+	r	1
$\phi'(y)$	+	0	– si $r < 1$
$\phi(y)$	$-\infty$	maximum	$\phi(1)$

Pour $r = 1$, la branche décroissante est absente et le maximum est au bord droit. Sur le segment réellement admissible $[b, 1]$, où $b = A(x) > 0$, il faut distinguer deux cas : si $b \leq r$, le maximum est atteint en r ; si $b > r$, la fonction décroît sur tout le segment et son maximum est en b .

12. i) On suppose $r \geq 1$. Pour $0 < y < 1$, on a $y < r$, donc $\phi'(y) > 0$. La fonction est strictement croissante sur $]0, 1]$; si $r = 1$, la dérivée est seulement nulle à l'extrémité 1.

y	0^+	1
$\phi'(y)$	+	≥ 0
$\phi(y)$	$-\infty$	maximum

En particulier, son maximum sur $[A(x), 1]$ est atteint en 1. Si cet intervalle est réduit à $\{1\}$, la conclusion reste vraie.

12. j) En réunissant les deux cas, la valeur optimale est

$$y^*(x, T-2) = \max \left(A(x), \min \left(1, \frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \right) \right),$$

avec $x = X(T-2) \in]0, 1]$.

Plus explicitement, pour $b = A(x)$ et r défini en 12.g), elle vaut b si $r \leq b$, r si $b \leq r \leq 1$, et 1 si $r \geq 1$. Les formules coïncident aux frontières. Tous les dénominateurs sont strictement positifs car $\alpha > 1$ et $0 < H(T - 1) < 1$.

La fonction est continue sur le segment compact $[b, 1]$ et ses variations montrent que ce maximum est atteint et unique. La valeur retenue est effectivement réalisable : lorsque $x < 1$, ψ_x est continue et strictement croissante de $[0, 1]$ sur $[A(x), 1]$; lorsque $x = 1$, l'unique valeur admissible est 1. L'autorisation de $p(T - 2) = 0$ est nécessaire lorsque le maximum se trouve à la borne $A(x)$.

Relevé des adaptations

1.b), 7.c) ii), 12.j) Le domaine des stratégies autorise $p(t) = 0$ pour $t \geq 1$, tout en maintenant $p(0) > 0$. L'original impose des proportions strictement positives à toutes les dates mais utilise ensuite les contraintes fermées $[A(X(t)), 1]$. Pour $X(t) < 1$, la borne inférieure correspond exactement à $p(t) = 0$; elle peut être optimale en 12.j). La rectification rend les contraintes et l'optimum cohérents, tout en conservant $D(t) > 0$ pour $t \geq 1$.

8., 12.a) Le produit télescopique et la convention générale des sommes et produits vides sont explicités. Cela traite $\tau = 1$ sans division par $D(0) = 0$, ainsi que les saisons arrêtées avant l'étape étudiée.

11.a), 12.a) Les conditions $T \geq 2$ en question 11 et $T \geq 3$ en question 12 sont précisées pour éviter de faire intervenir $\ln X(0)$, puisque $X(0) = 0$.

12.c) La signification des états connus et des choix comparés est explicitée : ils sont constants sur l'événement où l'étape est atteinte. Les propriétés de la variable $\mathcal{E}_B$ définie en question 10 sont démontrées par les calculs finis demandés, et non invoquées comme un cours général d'espérance conditionnelle.