



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2017

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Étudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire : le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales.

Catégorie sociale	Avant 1910	Entre 1935 et 1940
Profession libérale	37 %	62 %
Ouvriers	1 %	10 %

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes, on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée, « Profession libérale », et la plus défavorisée, « Ouvriers ».

Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on en déduit que l'inégalité a diminué.

Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on en déduit que l'inégalité a augmenté : le nombre de ceux qui n'y ont pas accès a proportionnellement plus diminué dans la catégorie la plus aisée.

Chacune de ces façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la concentration d'une loi de probabilité pour contourner les paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins en être conscient.

I — Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ est convexe sur

J si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (t_1, t_2) \in J^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2).$$

On rappelle qu'une fonction f est concave si $-f$ est convexe.

On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, continues et convexes sur $[0, 1]$, telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E , on note $\tilde{f}$ l'application associée à f , définie sur $[0, 1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

On pose $I(f) = 2 \int_0^1 \tilde{f}(t) dt = 2 \int_0^1 (t - f(t)) dt$. Le nombre $I(f)$ s'appelle l'indice de Gini de l'application f .

1. a) Donner une interprétation géométrique de la propriété de convexité.
1. b) Lorsque f est une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0, 1]$ à l'aide de la dérivée f' .

2. a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0, 1]$.

2. b) Montrer que $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t) dt$.

2. c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$, et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

3. Un premier exemple.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0, 1]$.

3. a) Montrer que f est un élément de E .

3. b) Calculer $I(f)$.
4. Propriétés de l'indice de Gini.
 4. a) Pour f élément de E , établir que $I(f) \geq 0$.
 4. b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1]$.
 4. c) Montrer que, pour tout élément f de E , $I(f) < 1$.
 4. d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = t^n$.
 4. d) i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.
 4. d) ii) En déduire que, pour tout réel A vérifiant $0 \leq A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $I(f) > A$.
5. Minoration de l'indice de Gini.
 5. a) Soit f élément de E . Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t)$.
 5. b) Montrer que, pour tout $t \in [0, t_0]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0) \frac{t}{t_0}$.
 5. c) Montrer que, pour tout $t \in [t_0, 1]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0) \frac{t-1}{t_0-1}$.
 5. d) En déduire que $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$.

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que, dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30 % de la population possèdent 9 % de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.

II — Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $] -\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On suppose que g possède une limite finie à droite en 0. On définit G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_0^x g(v) dv$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x .

On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} vg(v) dv$ est convergente et l'on note m sa valeur, qui représente la richesse moyenne de la population.

6. a) Montrer que $m > 0$.

6. b) Montrer que G est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. On notera G^{-1} son application réciproque.

6. c) Quel est le sens de variation de G^{-1} sur $[0, 1[$?

7. a) À l'aide du changement de variable $u = G(v)$, établir que, pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\int_0^t G^{-1}(u) du = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v) dv.$$

7. b) En déduire que $\int_0^1 G^{-1}(u) du$ converge et donner sa valeur. Cette intégrale désigne la limite lorsque $t \rightarrow 1^-$ des intégrales sur $[0, t]$.

8. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u) du$ pour $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

8. a) i) Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

8. a) ii) Montrer que f est convexe sur $[0, 1]$. On admettra qu'en fait elle est convexe sur $[0, 1]$.

8. a) iii) En déduire que f est un élément de E .

8. b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité

$$I(f) = -1 + \frac{2}{m} \int_0^{+\infty} v g(v) G(v) dv.$$

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ .

9. a) Expliciter $G(x)$ pour $x \geq 0$.

9. b) Expliciter $G^{-1}(u)$ pour $u \in [0, 1[$.

9. c) Donner la valeur de m .

9. d) Soit $t \in [0, 1[$. Montrer que $f(t) = - \int_0^t \ln(1 - u) du$.

9. e) En déduire que, pour tout élément t de $[0, 1[$, $f(t) = (1 - t) \ln(1 - t) + t$.

9. f) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 (1 - t) \ln(1 - t) dt$ et la calculer. On pourra prolonger l'intégrande par continuité en 1.

9. g) En déduire la valeur de $I(f)$.

III — Application à une population

Une population de N personnes est divisée en deux classes, typiquement hommes et femmes, et en n catégories, par exemple socio-professionnelles, suivant le tableau à double entrée ci-dessous, où tous les x_i et y_i , pour $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des entiers naturels. On suppose que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \neq 0$.

Classes / Caté- gories	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_i	$\dots$	c_n	Total
I	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n	X
II	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n	Y
Total	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_i	$\dots$	n_n	N

On a posé $n_i = x_i + y_i$,

$$X = \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i$$

et $X + Y = N$. On suppose en outre que $Y > 0$.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on adopte les notations suivantes :

$$p_i = \frac{n_i}{N}, \quad q_i = \frac{x_i}{X}, \quad r_i = \frac{y_i}{Y}.$$

On note aussi $\varepsilon_i = \frac{x_i}{n_i}$ et $\varepsilon = \frac{X}{N}$. On suppose que les catégories sont numérotées de telle sorte que $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_n$.

10. On pose $\Omega = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, ensemble des catégories dans la population.

10. a) Montrer que $P = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$, $Q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $R = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des distributions de probabilités.

10. b) Montrer que $\frac{q_1}{p_1} \leq \dots \leq \frac{q_n}{p_n}$. On note cette suite d'inégalités (*).

10. c) Montrer que $\frac{r_1}{p_1} \geq \dots \geq \frac{r_n}{p_n}$.

10. d) Montrer que, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $r_i = \frac{n_i - x_i}{N - X} = \frac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon}$.

11. Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E , qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.

On pose $P_0 = Q_0 = 0$ et, pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$P_i = \sum_{h=1}^i p_h$$

et

$$Q_i = \sum_{h=1}^i q_h.$$

On définit l'application φ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout entier $i \in \{0, \dots, n\}$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et, pour tout entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

11. a) On suppose dans cette question que $n = 3$. Représenter dans un repère orthonormé φ lorsque $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et $Q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

11. b) Montrer que, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est $u_i = \frac{q_i}{p_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

11. c) Montrer que, si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $t \in [P_i, P_{i+1}]$, on a $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

11. d) En admettant que les inégalités (*) de la question 10. b) permettent d'affirmer que φ est convexe, justifier que φ appartient à E .

11. e) Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, calculer $\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt$.

11. f) Exprimer $I(\varphi)$ sous la forme d'une somme en fonction de $P_0, P_1, \dots, P_n, Q_0, \dots, Q_n$.

12. Nous allons maintenant étudier l'application correspondant à la classe II.

On pose $P_0 = R_0 = 0$ et, pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$P_i = \sum_{h=1}^i p_h$$

et

$$R_i = \sum_{h=1}^i r_h.$$

De même, on définit, pour $i \in \{0, \dots, n\}$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$. On considère l'application ψ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout entier $i \in \{0, \dots, n\}$, $\psi(P_i) = R_i$ et, pour tout entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

12. a) Montrer que, dans le plan, la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est $v_i = \frac{r_i}{p_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

12. b) On considère l'application ψ^* définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1 - t)$.

12. b) i) On suppose dans cette question que $n = 3$. Représenter dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de ψ et ψ^* lorsque $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et $R = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

12. b) ii) Montrer que ψ^* est convexe sur $[0, 1]$.

12. b) iii) Montrer que ψ^* est affine sur chaque segment $[\Pi_i, \Pi_{i+1}]$, pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

12. b) iv) Montrer que la pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est v_{n-i+1} pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

On dit dans cette situation que les fonctions φ et ψ^* sont adjointes l'une de l'autre. C'est leur comparaison que Gini a proposé de considérer pour mesurer les inégalités entre la population de catégorie I et celle de catégorie II.

La dernière question étudie à quelles conditions l'égalité entre les fonctions adjointes impose un même taux de représentation de la classe I dans toutes les catégories.

13. Dans cette question, on suppose que les catégories ayant le même taux ε_i ont été regroupées : si $n \geq 2$, on a donc $\varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_n$. Les notations précédentes s'appliquent aux catégories ainsi regroupées.

13. a) Montrer que, si $\varphi = \psi^*$, alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}.$$

13. b) Montrer que, si $\varphi = \psi^*$, alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$.

13. c) En déduire que, si $\varphi = \psi^*$, on a, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_i(1 - 2\varepsilon) = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$.

13. d) On suppose $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$. Montrer que, si $\varphi = \psi^*$, alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_i = \varepsilon$. Interpréter ce résultat.