



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2017

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

I — Indice de Gini

Dans toute la première partie, $f \in E$. La convexité appliquée aux extrémités du segment donne, pour $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq f(t) \leq (1-t)f(0) + tf(1) = t.$$

Ainsi $\tilde{f}$ est continue, positive ou nulle, et s'annule en 0 et en 1.

1. a) Le point d'abscisse $\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ situé sur le segment joignant $(t_1, f(t_1))$ et $(t_2, f(t_2))$ a pour ordonnée $\lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2)$. La définition dit que la courbe de f est au-dessous de chacune de ses cordes.
1. b) Question adaptée au programme actuel : l'hypothèse C^1 de l'original est remplacée par C^2 , cadre de la caractérisation de convexité du programme appliqué.

Pour une fonction f de classe C^2 , f est convexe si et seulement si f' est croissante. Cela équivaut à $f'' \geq 0$ sur l'intérieur du segment. La continuité permet d'inclure les extrémités dans les inégalités de convexité.

2. a) Soient $x, y \in [0, 1]$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par convexité de f ,

$$\tilde{f}(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda x + (1-\lambda)y - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \tilde{f}(x) + (1-\lambda)\tilde{f}(y).$$

C'est précisément la concavité de $\tilde{f}$. Cette preuve utilise la définition et ne suppose aucune dérivabilité de f .

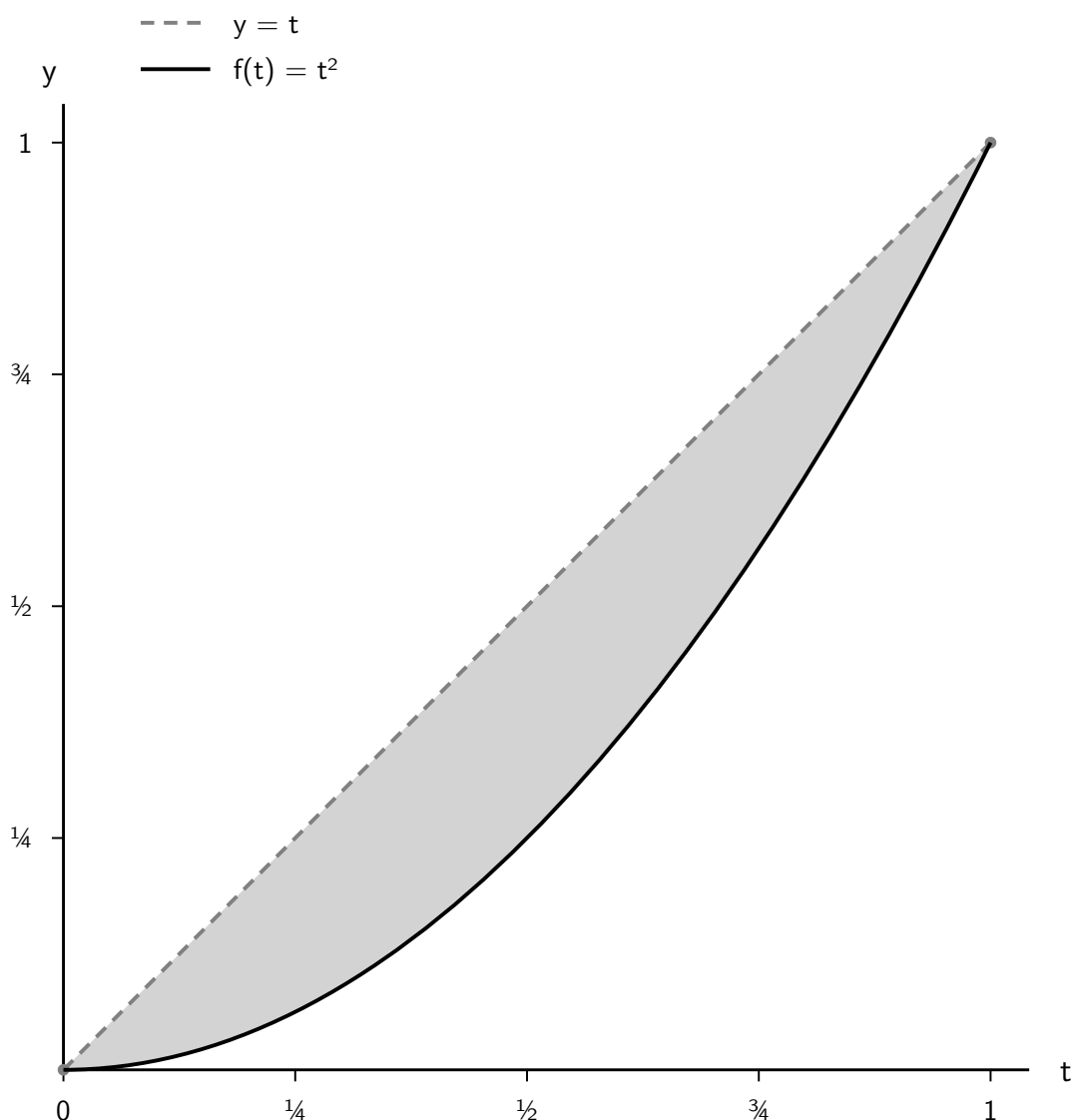
2. b) Toutes les fonctions intégrées sont continues sur le segment. Par linéarité,

$$I(f) = 2 \int_0^1 t \, dt - 2 \int_0^1 f(t) \, dt = 1 - 2 \int_0^1 f(t) \, dt.$$

2. c) Les deux courbes passent par $(0, 0)$ et $(1, 1)$, et celle de f est sous la droite $y = t$.

L'aire $\mathcal{A}$ comprise entre les deux courbes vaut $\int_0^1 (t - f(t)) \, dt$; par conséquent $I(f) = 2\mathcal{A}$.

La forme précise de f n'étant pas fixée, le dessin ci-dessous illustre cette propriété avec l'exemple $f(t) = t^2$. La zone grisée est l'aire $\mathcal{A}$; aucune valeur propre à une autre fonction n'est présumée.



3. a) La fonction polynomiale $f(t) = t^2$ est continue sur $[0, 1]$, y prend des valeurs dans $[0, 1]$, et vérifie $f(0) = 0, f(1) = 1$. Elle est de classe C^2 et $f''(t) = 2 > 0$, donc elle est convexe. Toutes les conditions sont satisfaites : $f \in E$.
3. b) La formule de 2. b) donne

$$I(f) = 1 - 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. a) L'inégalité $f(t) \leq t$ établie au début montre que $\tilde{f}(t) \geq 0$. La positivité de

$$\text{l'intégrale entraîne } I(f) = 2 \int_0^1 \tilde{f}(t) dt \geq 0.$$

4. b) Si $f(t) = t$ partout, alors $\tilde{f} = 0$ et $I(f) = 0$.

Réciproquement, supposons $I(f) = 0$. S'il existait $a \in [0, 1]$ tel que $\tilde{f}(a) > 0$, on aurait $a \in]0, 1[$, puisque $\tilde{f}$ est nulle aux bornes. Par continuité, il existerait $\delta > 0$ tel que $[a - \delta, a + \delta] \subset [0, 1]$ et $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(a)/2$ sur ce segment. On aurait alors $I(f) \geq 2\delta\tilde{f}(a) > 0$, contradiction. Ainsi $\tilde{f} = 0$, donc $f(t) = t$ pour tout t .

4. c) La continuité en 1 et $f(1) = 1$ donnent un $\delta \in]0, 1[$ tel que $f(t) \geq 1/2$ sur $[1 - \delta, 1]$.
Comme $f \geq 0$ partout,

$$\int_0^1 f(t) dt \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

La formule de 2. b) implique $I(f) < 1$. La borne supérieure 1 ne peut donc pas être atteinte.

4. d) i) Pour $n = 1$, $f_n(t) = t$ appartient à E . Pour $n \geq 2$, f_n est polynomiale et $f_n''(t) = n(n-1)t^{n-2} \geq 0$; ses valeurs et ses valeurs aux bornes vérifient également les conditions de E . Dans tous les cas,

$$I(f_n) = 1 - 2 \int_0^1 t^n dt = 1 - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

4. d) ii) Soit $0 \leq A < 1$. Choisissons un entier $n \geq 1$ tel que $n+1 > 2/(1-A)$, ce qui est possible puisque $1-A > 0$. Alors $I(f_n) = 1 - 2/(n+1) > A$. Les indices de Gini peuvent donc approcher 1 par valeurs inférieures.

5. a) La fonction $\tilde{f}$ est continue sur le segment $[0, 1]$: elle y atteint son maximum $M \geq 0$.
Si $M > 0$, tout point où il est atteint appartient à $]0, 1[$, car les valeurs aux bornes

sont nulles. Si $M = 0$, la positivité implique $\tilde{f} = 0$ et l'on peut choisir $t_0 = 1/2$. Dans tous les cas, un tel $t_0 \in]0, 1[$ existe.

5. b) Pour $0 \leq t \leq t_0$, on a $t = (t/t_0)t_0 + (1 - t/t_0)0$. Par concavité,

$$\tilde{f}(t) \geq \frac{t}{t_0} \tilde{f}(t_0) + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \tilde{f}(0) = \frac{t}{t_0} \tilde{f}(t_0).$$

Le dénominateur t_0 est strictement positif.

5. c) Pour $t \in [t_0, 1]$, posons $\lambda = (1 - t)/(1 - t_0) \in [0, 1]$. On a $t = \lambda t_0 + (1 - \lambda)1$. La concavité et $\tilde{f}(1) = 0$ donnent

$$\tilde{f}(t) \geq \lambda \tilde{f}(t_0) = \tilde{f}(t_0) \frac{t - 1}{t_0 - 1}.$$

Le dénominateur est non nul puisque $t_0 < 1$.

5. d) Intégrons les deux minoration sur leurs segments respectifs. En notant $M = \tilde{f}(t_0)$,

$$I(f) \geq 2M \left(\int_0^{t_0} \frac{t}{t_0} dt + \int_{t_0}^1 \frac{1-t}{1-t_0} dt \right) = 2M \left(\frac{t_0}{2} + \frac{1-t_0}{2} \right) = M.$$

Géométriquement, l'aire sous la courbe de $\tilde{f}$ est au moins celle du triangle de sommets $(0, 0)$, (t_0, M) et $(1, 0)$, de base 1 et de hauteur M .

II — Le cas à densité

Question adaptée au programme actuel : le préambule précise que g possède une limite finie à droite en 0, conformément au cadre des densités étudiées. Pour les calculs d'intégrales, on peut attribuer à g en 0 cette limite sans modifier les intégrales ni la loi. Les arguments restent d'abord effectués sur des segments avant tout passage à la limite.

6. a) L'intégrande $v \mapsto vg(v)$ est positive ou nulle sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Par exemple, elle est continue et strictement positive sur $[1, 2]$, donc son intégrale sur ce segment est strictement positive. Ainsi

$$m = \int_0^{+\infty} vg(v) dv \geq \int_1^2 vg(v) dv > 0.$$

Sa finitude est une hypothèse du sujet ; toutes les divisions par m sont donc licites.

6. b) La fonction G est continue sur $[0, +\infty[$ et $G(0) = 0$. Pour $0 \leq a < b$,

$$G(b) - G(a) = \int_a^b g(v) dv > 0, \text{ car } g \text{ est strictement positive sur l'intérieur du segment hors éventuellement } 0. \text{ Ainsi } G \text{ est strictement croissante.}$$

Puisque g est une densité nulle sur les réels négatifs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$. Pour tout $x \geq 0$, la positivité de g sur $[x+1, x+2]$ implique $1 - G(x) > 0$: la valeur 1 n'est jamais atteinte. Par le théorème de la bijection, G est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

6. c) La réciproque d'une bijection continue strictement croissante est continue et strictement croissante. Donc G^{-1} est strictement croissante sur $[0, 1[$, avec

$$G^{-1}(0) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 1^-} G^{-1}(t) = +\infty.$$

Pour justifier cette dernière limite, soit $R > 0$. Dès que $t > G(R)$, la croissance donne $G^{-1}(t) > R$.

7. a) Pour $t = 0$, les deux intégrales sont nulles. Pour $0 < t < 1$, posons $b = G^{-1}(t) > 0$.

Le changement indiqué $u = G(v)$ est de classe C^1 sur $[0, b]$ après le prolongement continu de g en 0, strictement croissant, et envoie les bornes 0, b sur 0, t . Comme $du = g(v) dv$ et $G^{-1}(G(v)) = v$,

$$\int_0^t G^{-1}(u) du = \int_0^b G^{-1}(G(v))g(v) dv = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v) dv.$$

7. b) Lorsque $t \rightarrow 1^-$, on a $G^{-1}(t) \rightarrow +\infty$. La définition de m et 7. a) donnent

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t G^{-1}(u) du = m.$$

L'intégrale demandée converge donc et vaut m . Il s'agit ici d'une limite particulière explicitement définie dans l'énoncé, et non de l'utilisation d'un critère général de singularité en borne finie.

8. a) i) La fonction G^{-1} est continue sur $[0, 1[$, donc sa primitive nulle en 0 est continue sur cet intervalle. Par 7. b), $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = m/m = 1 = f(1)$. Ainsi f est continue sur tout $[0, 1]$.

8. a) ii) Pour $t \in]0, 1[$, $f'(t) = G^{-1}(t)/m$. Pour appliquer le critère de 1. b), précisons la régularité : G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $G'(x) = g(x) > 0$. Si $s \rightarrow t$, le quotient

$$\frac{G^{-1}(s) - G^{-1}(t)}{s - t} = \left(\frac{G(G^{-1}(s)) - G(G^{-1}(t))}{G^{-1}(s) - G^{-1}(t)} \right)^{-1}$$

tend vers $1/g(G^{-1}(t))$ par continuité de la réciproque et dérivabilité de G . Cette expression est continue et positive ; G^{-1} est donc de classe C^1 sur $]0, 1[$. Ainsi f y est de classe C^2 , avec

$$f''(t) = \frac{1}{m g(G^{-1}(t))} > 0.$$

Donc f est convexe sur $]0, 1[$. Les inégalités de convexité incluant 0 s'obtiennent par passage à la limite, grâce à la continuité de f en 0. Cela prouve la convexité sur $[0, 1[$. Comme autorisé par le sujet, on admet son extension à $[0, 1]$.

8. a) iii) La positivité de G^{-1} entraîne $f(t) \geq 0$. Pour $t < 1$, $\int_0^t G^{-1}(u) du \leq m$, donc $f(t) \leq 1$; on a aussi $f(1) = 1$. Enfin $f(0) = 0$, et la continuité ainsi que la convexité viennent d'être établies. Par conséquent $f \in E$.

8. b) Commençons par l'existence de l'intégrale du résultat. Pour $v \geq 0$, $0 \leq vg(v)G'(v) \leq vg(v)$, dont l'intégrale vaut $m < +\infty$. La comparaison garantit donc la convergence.

Soit $b \in]0, 1[$. Sur $[0, b]$, f est de classe C^1 et $f'(t) = G^{-1}(t)/m$, avec dérivée à droite en 0. L'intégration par parties donne

$$\int_0^b f(t) dt = bf(b) - \frac{1}{m} \int_0^b tG^{-1}(t) dt.$$

Effectuons dans la dernière intégrale le changement $t = G(v)$, déjà indiqué en 7. a), sur

le segment $[0, G^{-1}(b)]$:

$$\int_0^b t G^{-1}(t) dt = \int_0^{G^{-1}(b)} G(v) v g(v) dv.$$

Lorsque $b \rightarrow 1^-$, le membre de gauche de l'intégration par parties tend vers $\int_0^1 f$ puisque f est continue sur $[0, 1]$. On a $b f(b) \rightarrow 1$ et la dernière intégrale tend vers l'intégrale convergente établie plus haut. Il vient

$$\int_0^1 f(t) dt = 1 - \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} v g(v) G(v) dv.$$

En utilisant 2. b), on obtient bien $I(f) = -1 + \frac{2}{m} \int_0^{+\infty} v g(v) G(v) dv$.

9. a) Pour $x \geq 0$, $G(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda v} dv = 1 - e^{-\lambda x}$.

9. b) Pour $u \in [0, 1[$, résoudre $u = 1 - e^{-\lambda x}$ donne $x = -\ln(1 - u)/\lambda$. Ainsi $G^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$, expression positive ou nulle.

9. c) La moyenne d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ existe et vaut $m = 1/\lambda$.

9. d) En remplaçant m et G^{-1} par leurs expressions dans la définition de f , on obtient

$$f(t) = \lambda \int_0^t -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) du = - \int_0^t \ln(1 - u) du.$$

9. e) La fonction $F(t) = (1 - t) \ln(1 - t) + t$ est dérivable sur $[0, 1[$ et

$$F'(t) = -\ln(1 - t) - 1 + 1 = -\ln(1 - t), \quad F(0) = 0.$$

Elle est donc la primitive nulle en 0 de l'intégrande de 9. d). Ainsi

$$f(t) = (1 - t) \ln(1 - t) + t \text{ pour } t < 1.$$

9. f) La croissance comparée $x \ln x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ montre que $(1 - t) \ln(1 - t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 1^-$. L'intégrande se prolonge donc en une fonction continue sur $[0, 1]$ en lui attribuant la valeur 0 en 1, ce qui justifie la convergence.

Par le changement affine $x = 1 - t$ sur les segments tronqués, puis passage à la limite,

$$\int_0^1 (1-t) \ln(1-t) dt = \int_0^1 x \ln x dx.$$

Pour $a \in]0, 1[$, une intégration par parties sur $[a, 1]$ donne

$$\int_a^1 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_a^1 = -\frac{1}{4} - \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{a^2}{4}.$$

Comme $a^2 \ln a \rightarrow 0$, l'intégrale demandée vaut $-1/4$.

9. g) Méthode 1 — Intégrer la courbe de concentration

Par 9. e) et 9. f), $\int_0^1 f(t) dt = -1/4 + 1/2 = 1/4$. Donc $I(f) = 1 - 2(1/4) = 1/2$.

Méthode 2 — Employer la formule en densité

La formule de 8. b) donne

$$I(f) = -1 + 2\lambda \int_0^{+\infty} \lambda v e^{-\lambda v} (1 - e^{-\lambda v}) dv.$$

Pour $a > 0$, l'intégration par parties sur $[0, R]$ donne

$$\int_0^R v e^{-av} dv = -R e^{-aR}/a + (1 - e^{-aR})/a^2. \text{ La croissance comparée } R e^{-aR} \rightarrow 0 \text{ entraîne}$$

$$\int_0^{+\infty} v e^{-av} dv = 1/a^2. \text{ Les deux intégrales ci-dessous convergent donc, et}$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda v e^{-\lambda v} (1 - e^{-\lambda v}) dv = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{(2\lambda)^2} \right) = \frac{3}{4\lambda}.$$

Ainsi $I(f) = -1 + 2\lambda \cdot 3/(4\lambda) = 1/2$. La première méthode exploite la formule explicite de f ; la seconde retrouve l'indice directement à partir de la densité, sans intégrer la fonction réciproque.

III — Application à une population

Les hypothèses $x_i > 0$ et $y_i \geq 0$ assurent $n_i > 0$, $X > 0$ et $N > 0$. Puisque $Y > 0$, $0 < \varepsilon = X/N < 1$. Tous les dénominateurs p_i , X , Y et $1 - \varepsilon$ utilisés ci-dessous sont donc strictement positifs.

10. a) Les nombres p_i , q_i et r_i sont positifs ou nuls. Leurs sommes sont respectivement N/N , X/X et Y/Y , donc valent 1. Les trois familles sont ainsi des distributions de probabilités sur l'ensemble fini Ω .

10. b) Pour chaque i , $q_i/p_i = (x_i/X)/(n_i/N) = \varepsilon_i/\varepsilon$. La division par $\varepsilon > 0$ conserve l'ordre des ε_i : on obtient les inégalités (*).

10. c) On a de même $r_i/p_i = (y_i/Y)/(n_i/N) = (1 - \varepsilon_i)/(1 - \varepsilon)$. Comme $1 - \varepsilon > 0$ et les ε_i sont croissants au sens large, ces rapports sont décroissants au sens large.

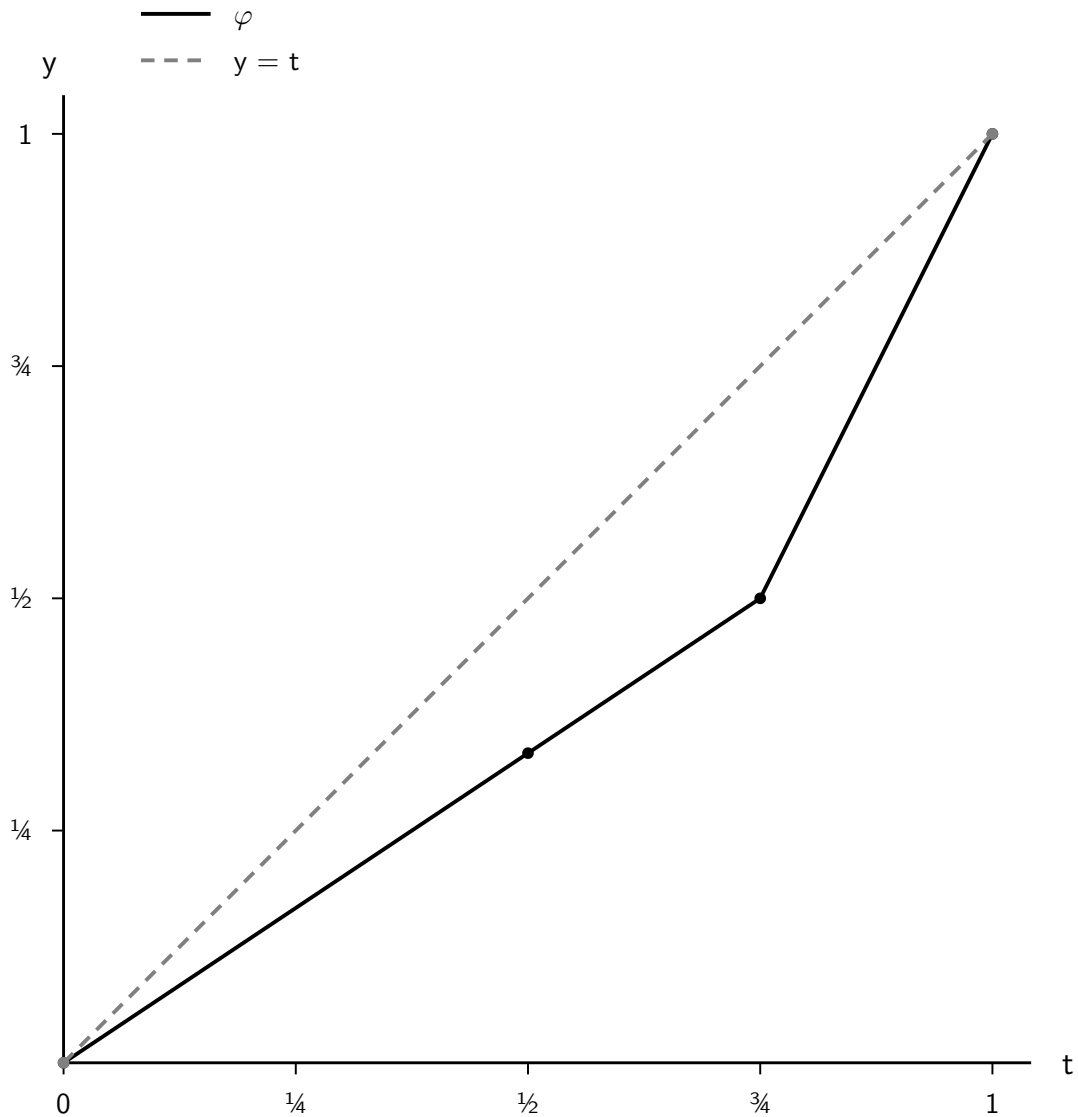
10. d) On utilise $Y = N - X$, $y_i = n_i - x_i$ et $\varepsilon q_i = (X/N)(x_i/X) = x_i/N$. Alors

$$\frac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon} = \frac{(n_i - x_i)/N}{(N - X)/N} = \frac{n_i - x_i}{N - X} = \frac{y_i}{Y} = r_i.$$

11. a) Les abscisses cumulées sont $P_0 = 0$, $P_1 = 1/2$, $P_2 = 3/4$, $P_3 = 1$. Les ordonnées cumulées sont $Q_0 = 0$, $Q_1 = 1/3$, $Q_2 = 1/2$, $Q_3 = 1$. La courbe est la ligne polygonale joignant, dans cet ordre,

$$(0, 0), \quad (1/2, 1/3), \quad (3/4, 1/2), \quad (1, 1).$$

Ses deux premiers segments sont alignés : leurs pentes valent $2/3$, tandis que la dernière vaut 2. On peut donc aussi écrire $\varphi(t) = 2t/3$ pour $0 \leq t \leq 3/4$, puis $\varphi(t) = 2t - 1$ pour $3/4 \leq t \leq 1$.



11. b) Pour $1 \leq i \leq n$, $P_i - P_{i-1} = p_i > 0$ et $Q_i - Q_{i-1} = q_i$. La pente est donc

$$u_i = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{q_i}{p_i}.$$

11. c) Sur $[P_i, P_{i+1}]$, la fonction est affine de pente u_{i+1} et prend la valeur Q_i en P_i .

L'équation de cette droite est donc $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

11. d) Les morceaux affines coïncident aux points de raccordement, car le morceau sur $[P_i, P_{i+1}]$ prend exactement les valeurs Q_i et Q_{i+1} aux bornes. La fonction est donc continue. Sur chaque segment, ses valeurs sont entre les deux ordonnées des extrémités, appartenant à $[0, 1]$. Enfin $\varphi(0) = Q_0 = 0$ et $\varphi(1) = Q_n = 1$.

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'original : une ligne polygonale dont les pentes successives u_i sont croissantes est convexe. Les inégalités de 10. b) en vérifient l'hypothèse. Ainsi $\varphi \in E$.

11. e) En intégrant la formule affine de 11. c),

$$\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt = \frac{u_{i+1}}{2} (P_{i+1} - P_i)^2 + Q_i (P_{i+1} - P_i).$$

Or $u_{i+1}(P_{i+1} - P_i) = Q_{i+1} - Q_i$. L'intégrale est donc

$$\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt = \frac{P_{i+1} - P_i}{2} (Q_i + Q_{i+1}).$$

Il s'agit aussi de l'aire du trapèze sous le segment, y compris lorsque ses deux hauteurs sont égales.

11. f) Les segments forment une subdivision de $[0, 1]$. Par Chasles et 2. b),

$$I(\varphi) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i)(Q_i + Q_{i+1}).$$

Pour écrire littéralement une seule somme, on peut utiliser

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i),$$

d'où

$$I(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i)(1 - Q_i - Q_{i+1}).$$

12. a) Comme en 11. b), la pente du segment est

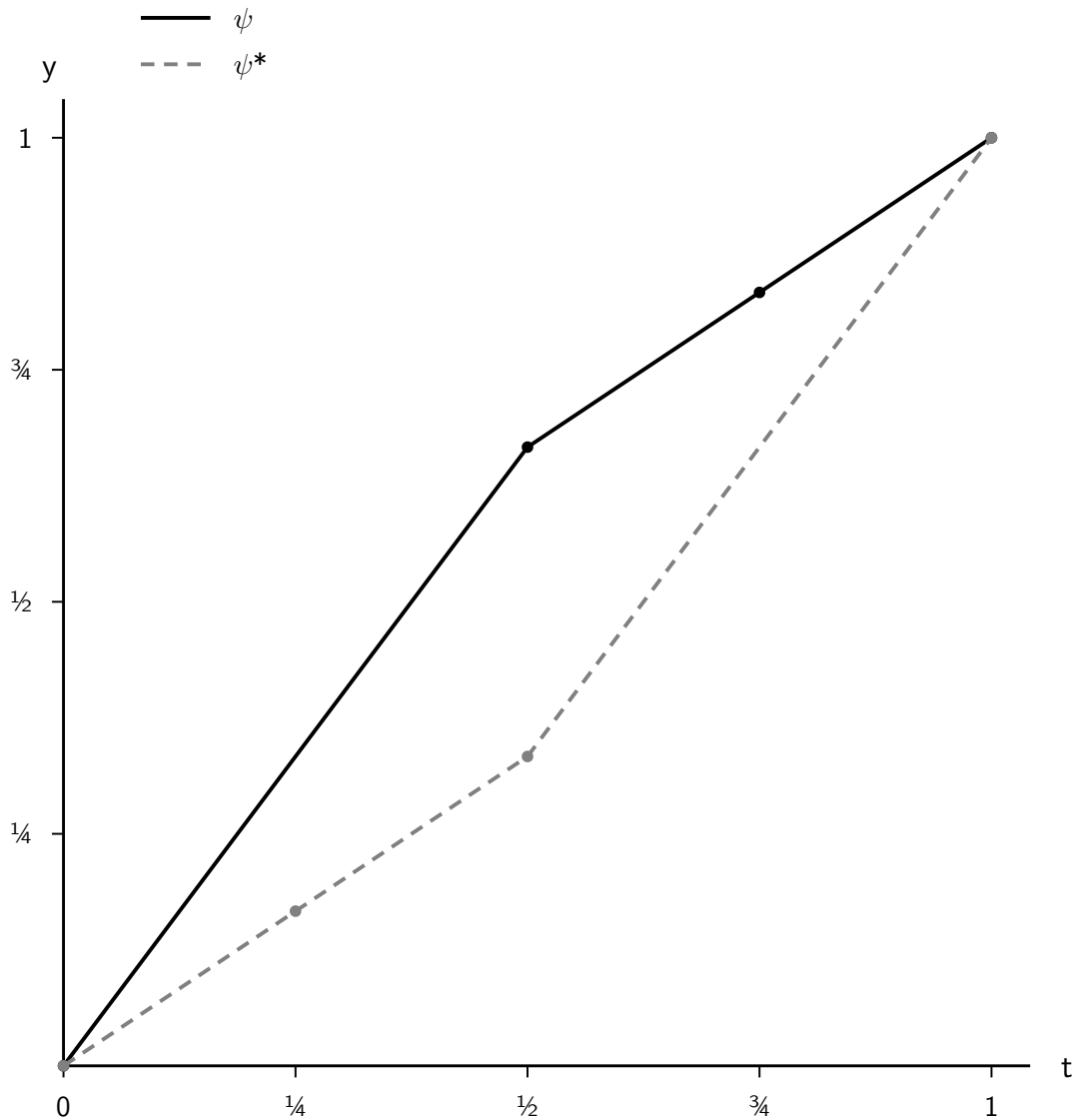
$$v_i = \frac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{r_i}{p_i}.$$

Elle est positive ou nulle, et la suite des pentes est décroissante d'après 10. c).

12. b) i) On a $P_1 = 1/2$, $P_2 = 3/4$, $R_1 = 2/3$, $R_2 = 5/6$. La courbe de ψ joint $(0, 0)$, $(1/2, 2/3)$, $(3/4, 5/6)$ et $(1, 1)$. Ses deux derniers segments, de pente $2/3$, sont alignés.

La transformation $(t, z) \mapsto (1 - t, 1 - z)$ est la symétrie centrale de centre $(1/2, 1/2)$. Elle envoie la courbe de ψ sur celle de ψ^* . Celle-ci joint, par abscisses croissantes, $(0, 0)$, $(1/4, 1/6)$, $(1/2, 1/3)$ et $(1, 1)$.

Explicitement, $\psi(t) = 4t/3$ sur $[0, 1/2]$, puis $\psi(t) = 2t/3 + 1/3$ sur $[1/2, 1]$. On a $\psi^*(t) = 2t/3$ sur $[0, 1/2]$, puis $\psi^*(t) = 4t/3 - 1/3$ sur $[1/2, 1]$.



12. b) ii) Par 10. c), les pentes de ψ sont décroissantes. Le critère polygonal admis en 11. d), appliqué à $-\psi$, montre que ψ est concave. Pour $s, t \in [0, 1]$ et $\lambda \in [0, 1]$, la concavité donne

$$\psi(1 - (\lambda s + (1 - \lambda)t)) \geq \lambda \psi(1 - s) + (1 - \lambda) \psi(1 - t).$$

En soustrayant les deux membres à 1, on obtient

$$\psi^*(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda \psi^*(s) + (1 - \lambda) \psi^*(t). \text{ Donc } \psi^* \text{ est convexe.}$$

12. b) iii) Pour $t \in [\Pi_i, \Pi_{i+1}] = [1 - P_{n-i}, 1 - P_{n-i-1}]$, on a $1 - t \in [P_{n-i-1}, P_{n-i}]$. La fonction ψ y est affine; sa composée avec $t \mapsto 1 - t$, puis la fonction $1 - \psi(1 - t)$, sont

affines. Ainsi ψ^* est affine sur chaque segment indiqué.

12. b) iv) Sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i] = [1 - P_{n-i+1}, 1 - P_{n-i}]$, écrivons $\psi(s) = v_{n-i+1}s + b$ sur le segment correspondant. Alors

$\psi^*(t) = 1 - v_{n-i+1}(1 - t) - b = v_{n-i+1}t + (1 - v_{n-i+1} - b)$. La pente demandée est donc v_{n-i+1} , sans changement de signe.

13. a) Question adaptée au programme actuel : pour rendre exacte l'identification des pentes de même rang demandée dans l'original, les catégories de même taux sont regroupées dans cette seule question. Le nombre de personnes et les courbes ne changent pas : on supprime uniquement des points intermédiaires situés sur un même segment.

Si $n = 1$, les deux pentes valent 1 ; puisque $\varepsilon_1 = \varepsilon$, l'égalité demandée est immédiate. Supposons $n \geq 2$. Les taux distincts croissants assurent que $u_i = \varepsilon_i/\varepsilon$ sont strictement croissants, tout comme les pentes successives $v_{n-i+1} = (1 - \varepsilon_{n-i+1})/(1 - \varepsilon)$ de ψ^* .

Les points $P_1, \dots, P_{n-1}$ sont donc exactement les abscisses où φ change de pente ; de même, celles de ψ^* sont $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}$. Si deux fonctions polygonales sont égales, leurs points de changement de pente coïncident : sinon, l'une serait affine autour d'un point où l'autre a deux pentes distinctes, ce qui est impossible. Les deux listes étant strictement croissantes, on a $P_i = \Pi_i$ pour chaque i .

Sur chaque intervalle commun non réduit à un point, les fonctions égales ont la même pente. Donc $u_i = v_{n-i+1}$, soit

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}.$$

La précision est nécessaire. Sans regroupement, prenons $n_i = (10, 15, 25)$ et $x_i = (2, 3, 20)$, donc $y_i = (8, 12, 5)$, $N = 50$, $X = Y = 25$, $\varepsilon_i = (1/5, 1/5, 4/5)$. Alors $\varphi = \psi^*$, avec pente $2/5$ sur $[0, 1/2]$ et $8/5$ sur $[1/2, 1]$. Pourtant, pour $i = 2$, le membre gauche de l'égalité originale vaut $2/5$ et le droit $8/5$. Tous les effectifs satisfont les hypothèses d'origine. Le regroupement remplace les deux premiers segments alignés par un seul et rétablit l'identification correcte.

13. b) Posons $j = n - i + 1$. La relation de 13. a) pour les indices i et j donne

$$(1 - \varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1 - \varepsilon_j), \quad (1 - \varepsilon)\varepsilon_j = \varepsilon(1 - \varepsilon_i).$$

En additionnant, $(1 - \varepsilon)(\varepsilon_i + \varepsilon_j) = \varepsilon(2 - \varepsilon_i - \varepsilon_j)$. En ramenant les termes de la somme dans le même membre, on obtient $\varepsilon_i + \varepsilon_j = 2\varepsilon$, comme demandé. Ce raisonnement reste valable lorsque $i = j$.

13. c) Par 13. b), $\varepsilon_j = 2\varepsilon - \varepsilon_i$. En substituant dans la première égalité de 13. b),

$$(1 - \varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1 - 2\varepsilon + \varepsilon_i).$$

En soustrayant $\varepsilon\varepsilon_i$, on obtient $\varepsilon_i(1 - 2\varepsilon) = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$.

13. d) L'hypothèse $\varepsilon \neq 1/2$ assure $1 - 2\varepsilon \neq 0$. On peut donc diviser l'égalité de 13. c) par ce facteur et conclure que $\varepsilon_i = \varepsilon$ pour tout i .

La proportion de personnes de la classe I est ainsi la même dans chaque catégorie que dans la population entière. Les relations de 10. b) et 10. c) donnent alors $q_i = p_i = r_i$. Dans un tirage uniforme d'une personne, l'appartenance à la classe I et l'appartenance à chaque catégorie sont indépendantes : la probabilité conjointe $x_i/N = p_i\varepsilon$ est le produit des deux probabilités. Il n'y a donc pas de déséquilibre de représentation des deux classes entre catégories au sens du modèle.

Après regroupement, tous les taux étant égaux, il reste une seule catégorie ; avant regroupement, chaque catégorie initiale possède le même taux. Les courbes valent $\varphi(t) = \psi^*(t) = t$ et leurs indices de Gini valent 0.

La restriction $\varepsilon \neq 1/2$ est indispensable à la conclusion : lorsque les deux classes ont le même effectif total, des taux différents peuvent produire des courbes adjointes égales, comme le contre-exemple de 13. a) le montre.

Relevé des adaptations

1. b) L'hypothèse C^1 est remplacée par C^2 pour employer la caractérisation de la convexité dans le cadre explicitement prévu par le programme. Les raisonnements portant sur une fonction seulement continue de E utilisent sa définition de convexité.

6.–8. La densité g est supposée avoir une limite finie à droite en 0, conformément à la restriction officielle sur les densités. Le changement de variable indiqué en 7. a) est repris explicitement en 8. b). La limite particulière définissant l'intégrale en 7. b) est précisée, et les intégrations par parties sont d'abord réalisées sur segments.

9. f) Une indication de prolongement continu en 1 accompagne l'intégrale pour éviter de supposer un chapitre général de singularités en borne finie.

13. Les catégories ayant le même taux sont regroupées dans cette seule question : sans cette précision, 13. a) est fausse, comme le contre-exemple détaillé dans le corrigé le vérifie. Les numéros et conclusions demandées sont conservés. La suppression de points intermédiaires alignés ne modifie pas les courbes. La phrase introductive qui attribuait sans restriction une absence totale d'inégalité à l'égalité des courbes est remplacée par une annonce tenant compte de l'exception $\varepsilon = 1/2$.