



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2016

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le but du problème est d'étudier le renouvellement des composants d'un système formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse à l'une de ces pièces et l'on se place dans la situation idéale où chaque pièce défectueuse est immédiatement remplacée. La première partie étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. La deuxième partie étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour. La troisième partie cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.

Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour toute variable aléatoire réelle X , on note, sous réserve d'existence, $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

Les deuxième et troisième parties sont indépendantes et peuvent être abordées en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel j non nul,

$$P(X = j) = P(X > j - 1) - P(X > j).$$

1. b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que

$$\sum_{j=1}^p jP(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) - pP(X > p).$$

2. a) On suppose que X admet une espérance $E(X) = \mu$.

2. a) i) Justifier la convergence de la série de terme général $kP(X = k)$.

2. a) ii) Montrer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) = 0.$$

2. a) iii) En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} pP(X > p) = 0$.

2. a) iv) Montrer que la série de terme général $P(X > j)$ converge.

2. a) v) Montrer que

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j).$$

2. b) On suppose que la série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$$

converge.

2. b) i) Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p \geq 1}$ définie par

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j).$$

2. b) ii) Comparer

$$\sum_{j=1}^p jP(X = j)$$

et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j).$$

2. b) iii) En déduire que X admet une espérance.
2. c) Conclure que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > j)$ converge.
3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout entier naturel j ,

$$P(X > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}. \quad (*)$$

3. a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
3. b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.
3. c) Montrer que, pour tout entier naturel j non nul,

$$P(X = j) = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{1}{(1 + 1/j)^\alpha} \right).$$

3. d) i) Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

3. d) ii) Montrer que, pour tout entier naturel j non nul, $P(X = j) \leq \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$.

3. e) Montrer, en utilisant le résultat de 3(c), que $\lim_{j \rightarrow +\infty} j^{\alpha+1} P(X = j) = \alpha$.

3. f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Deuxième partie — Étude de la probabilité de panne un jour donné

Dans cette partie, on suppose donnée une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $i \geq 1$, X_i représente la durée de vie en jours du i -ième composant en fonctionnement.

Pour tout $k \geq 1$, on note $T_k = X_1 + \dots + X_k$: T_k représente le jour où le k -ième composant tombe en panne. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement A_n : «le composant en place le jour n tombe en panne», c'est-à-dire «il existe un entier $k \geq 1$ tel que $T_k = n$ ». On se propose d'étudier $P(A_n)$.

4. Pour tout entier $j \geq 1$, on note $p_j = P(X_1 = j)$ et $u_j = P(A_j)$. On suppose dans cette question que $p_j \neq 0$ pour tout $j \geq 1$. On pose par convention $u_0 = 1$.

4. a) Montrer que $u_1 = p_1$.

4. b) i) Montrer que $A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

4. b) ii) En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2 .

4. c) Pour tout entier $i \geq 1$, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

4. c) i) Montrer que les variables $\tilde{X}_i$, pour $i \geq 1$, sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1 .

4. c) ii) Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n . Montrer que

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j \geq 1} [\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j = n - k].$$

4. c) iii) En déduire que, pour $1 \leq k < n$, $P_{[X_1=k]}(A_n) = P(A_{n-k})$.

4. d) Montrer que $u_n = u_{n-1}p_1 + \dots + u_0p_n$.
4. e) Soit $P = [p_1, \dots, p_n]$ la liste Python de longueur n , telle que $P[j-1] = p_j$ pour $1 \leq j \leq n$. Écrire un programme Python qui calcule u_n à partir de P .
5. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Dans cette question, X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ : pour tout $j \geq 1$, $P(X_1 = j) = \lambda(1 - \lambda)^{j-1}$.
5. a) Calculer $P(X_1 > k)$ pour tout entier $k \geq 1$.
5. b) Calculer $P_{[X_1 > k]}(X_1 = k + 1)$.
5. c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $P(A_n) = \lambda$.
6. On suppose dans cette question que $0 < p_1 < 1$ et $p_2 = 1 - p_1$. On pose $p = p_1 = 1 - p_2$.
6. a) Que vaut p_j pour $j \geq 3$?
6. b) Soit $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,
- $$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$
6. c) i) Diagonaliser M .

6. c) ii) Montrer que

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. d) i) Exprimer u_n en fonction de p et de n .

6. d) ii) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Troisième partie — Étude de la durée de fonctionnement

On suppose donnée une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, X_i représentant la durée de vie en jours du i -ième composant en fonctionnement.

Soit $k \geq 1$. On étudie la durée de fonctionnement du système lorsqu'on dispose de k composants, y compris celui installé au départ. On note toujours $T_k = X_1 + \dots + X_k$.

On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que, pour tout entier naturel j , $P(X_1 > j) = 1/(j+1)^\alpha$. En particulier, X_1 admet une espérance $\mu = E(X_1)$.

7. Que vaut $E(T_k)$?

8. On suppose dans cette question que $\alpha > 2$. On note $\sigma^2 = V(X_1)$.

8. a) Calculer $V(T_k)$.

8. b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|T_k - k\mu| \geq k\varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}.$$

8. c) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[\right) = 1.$$

9. On suppose maintenant uniquement $\alpha > 1$: X_1 n'a pas nécessairement de variance et la méthode précédente n'est donc pas toujours applicable. On met en œuvre une méthode de troncation.

On fixe un entier $m \geq 1$. Pour tout $i \geq 1$, on définit

$$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leq m, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. a) Montrer que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

9. b) i) En utilisant 3(d)(ii), montrer que

$$E(Z_1^{(m)}) \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}.$$

9. b) ii) Montrer que $E(Z_1^{(m)}) \leq \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$.

9. b) iii) Calculer $\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$.

9. b) iv) En déduire que $\lim_{m \rightarrow +\infty} E(Z_1^{(m)}) = 0$.

9. b) v) Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} E(Y_1^{(m)}) = \mu$.

9. c) i) Montrer que $(Y_1^{(m)})^2 \leq mX_1$.

9. c) ii) En déduire que $V(Y_1^{(m)}) \leq m\mu$.

9. d) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $m_0 \geq 1$ tel que, pour tout entier $m \geq m_0$,

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \leq \varepsilon.$$

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0 .

9. e) Pour tout entier $k \geq 1$, on note

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^k Y_i^{(m)}$$

et

$$V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^k Z_i^{(m)}.$$

Vérifier que $T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$.

9. f) i) Montrer que $E(V_k^{(m)}) \leq k \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$.

9. f) ii) En déduire que $P(V_k^{(m)} \geq k\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$.

9. g) i) Montrer que $E(U_k^{(m)}) \geq k\mu - k \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$.

9. g) ii) En déduire que $|E(U_k^{(m)}) - k\mu| \leq k\varepsilon$.

9. g) iii) Montrer que

$$P(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon) \leq P(|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon).$$

9. g) iv) Montrer que $V(U_k^{(m)}) \leq km\mu$.

9. g) v) En déduire que $P(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon) \leq \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$.

9. h) i) Montrer que, pour tous événements $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

9. h) ii) Appliquer cette inégalité aux événements

$$A = [V_k^{(m)} < k\varepsilon], \quad B = [U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[$$

pour montrer que

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geq P(V_k^{(m)} < k\varepsilon) + P(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[) - 1.$$

9. h) iii) Dédurre des questions précédentes que, pour tout $\varepsilon > 0$, tout entier $m \geq m_0$ et tout entier $k \geq 1$,

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

9. h) iv) Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}[$ et conclure que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right) = 1.$$