



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2016

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Première partie

1. a) Comme X est à valeurs entières, l'événement $[X > j - 1]$ est la réunion disjointe de $[X = j]$ et $[X > j]$. L'additivité des probabilités donne donc

$$P(X = j) = P(X > j - 1) - P(X > j).$$

1. b) Posons $q_j = P(X > j)$. La question précédente donne

$$\sum_{j=1}^p jP(X = j) = \sum_{j=1}^p jq_{j-1} - \sum_{j=1}^p jq_j = \sum_{r=0}^{p-1} (r+1)q_r - \sum_{r=1}^p rq_r.$$

Pour $1 \leq r \leq p-1$, les coefficients se soustraient en 1. Il reste aussi q_0 et le terme $-pq_p$. Ainsi

$$\sum_{j=1}^p jP(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) - pP(X > p).$$

Il s'agit exclusivement de sommes finies ; aucun échange de séries n'est utilisé.

2. a) i) Pour une variable discrète, l'existence de l'espérance signifie que la série définissant cette espérance est absolument convergente. Comme $X \geq 1$, tous les termes sont positifs : la série

$$\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$$

converge et sa somme est μ .

2. a) ii) Si

$$s_p = \sum_{k=1}^p kP(X = k),$$

alors $s_p \rightarrow \mu$. Le reste d'une série convergente vérifie donc

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) = \mu - s_p \rightarrow 0.$$

2. a) iii) En écrivant

$$P(X > p) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} P(X = k)$$

et en utilisant $p \leq k$ dans chaque terme,

$$0 \leq pP(X > p) \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k).$$

Le majorant tend vers zéro d'après 2(a)(ii). Par encadrement, $pP(X > p) \rightarrow 0$.

2. a) iv) La question 1(b) s'écrit

$$\sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = s_p + pP(X > p).$$

Le premier terme de droite tend vers μ et le second vers zéro. Les sommes partielles de la série des probabilités de queue ont donc une limite finie : cette série converge.

2. a) v) En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$E(X) = \mu = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j).$$

Le passage à la limite porte ici sur une identité de sommes partielles dont chaque terme a déjà été contrôlé.

2. b) i) Pour tout $p \geq 1$,

$$v_{p+1} - v_p = P(X > p) \geq 0.$$

La suite (v_p) est donc croissante au sens large. L'inégalité peut être une égalité lorsque le support de X est fini.

2. b) ii) Notons

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j),$$

qui est fini par hypothèse. Avec 1(b),

$$0 \leq \sum_{j=1}^p jP(X = j) = v_p - pP(X > p) \leq v_p \leq S.$$

Les sommes partielles de l'espérance sont donc toutes majorées par S .

2. b) iii) La suite des sommes partielles

$$\sum_{j=1}^p jP(X = j)$$

est croissante, car ses termes sont positifs, et majorée d'après 2(b)(ii). Elle converge. Il y a donc convergence absolue de la série définissant $E(X)$, ce qui prouve que X admet une espérance.

2. c) Les questions 2(a) et 2(b) établissent les deux implications. Pour une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$,

$$E(X) \text{ existe} \iff \sum_{j \geq 0} P(X > j) \text{ converge.}$$

Lorsque ces conditions sont satisfaites, la valeur de l'espérance est la somme de cette dernière série.

3. a) Pour $j \geq 1$, définissons

$$a_j = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha}.$$

Puisque $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$: chaque a_j est positif. Pour tout $p \geq 1$, la somme télescopique vaut

$$\sum_{j=1}^p a_j = 1 - \frac{1}{(p+1)^\alpha} \rightarrow 1.$$

Les nombres a_j définissent donc une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$. Si X suit cette loi, pour tout entier $r \geq 0$,

$$P(X > r) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=r+1}^p a_j = \frac{1}{(r+1)^\alpha}.$$

La loi ainsi construite a bien les probabilités de queue demandées.

3. b) D'après 2(c), l'espérance existe si et seulement si la série

$$\sum_{j \geq 0} (j+1)^{-\alpha}$$

converge. Il s'agit d'une série de Riemann; dans ce cadre de variable discrète, le critère du programme donne la convergence exactement pour $\alpha > 1$.

3. c) La question 1(a), appliquée aux queues données, fournit

$$P(X = j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{1}{(1 + 1/j)^\alpha} \right).$$

3. d) i) La fonction f est de classe C^1 sur un ouvert contenant $[0, 1]$, car $1 + x > 0$ sur cet intervalle. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha((1+x)^{-\alpha-1} - 1).$$

Elle est nulle en zéro et strictement négative pour $0 < x \leq 1$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0, 1]$, de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1 - 2^{-\alpha} - \alpha$. En particulier, $f(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$.

3. d) ii) Pour $j \geq 1$, $1/j \in [0, 1]$. L'inégalité $f(1/j) \leq 0$ donne

$$1 - (1 + 1/j)^{-\alpha} \leq \frac{\alpha}{j}.$$

En multipliant par $j^{-\alpha} > 0$ et en utilisant 3(c), on obtient bien $P(X = j) \leq \alpha/j^{1+\alpha}$.

3. e) Posons $g(x) = (1+x)^{-\alpha}$, définie et dérivable au voisinage de zéro. Elle vérifie $g(0) = 1$ et $g'(0) = -\alpha$. Par la définition de la dérivée,

$$\frac{1 - g(h)}{h} \rightarrow \alpha \quad (h \rightarrow 0).$$

En prenant $h = 1/j$ dans cette limite et en utilisant 3(c),

$$j^{\alpha+1} P(X = j) = j(1 - (1 + 1/j)^{-\alpha}) \rightarrow \alpha.$$

Aucun développement limité d'ordre supérieur n'est nécessaire.

3. f) L'existence de $V(X)$ est équivalente à celle du moment d'ordre deux $E(X^2)$: un moment d'ordre deux fini entraîne aussi un moment d'ordre un fini, puisque $X \leq X^2$. Par transfert, le second moment existe exactement lorsque la série positive

$$\sum_{j \geq 1} j^2 P(X = j)$$

converge.

D'après 3(e),

$$j^2 P(X = j) \sim \frac{\alpha}{j^{\alpha-1}}.$$

Le critère d'équivalence pour séries positives, puis celui de Riemann, donnent la convergence si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 2$. Pour $\alpha > 2$, l'espérance existe aussi et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ est fini. Pour $0 < \alpha \leq 2$, le second moment est infini et la variance n'existe pas.

Deuxième partie

Les durées étant entières et au moins égales à un, on a $T_{r+1} \geq T_r + 1$ et $T_r \geq r$. Ainsi les événements $[T_r = n]$ sont deux à deux disjoints et seuls les indices $1 \leq r \leq n$ peuvent intervenir dans A_n . Cette observation justifie les réunions finies utilisées ci-dessous.

4. a) La seule possibilité pour une panne le jour un est que $X_1 = 1$, puisque $T_r \geq r$.
Donc $A_1 = [X_1 = 1]$ et $u_1 = p_1$.

4. b) i) Une panne le jour deux correspond à $T_1 = 2$ ou $T_2 = 2$. Le premier événement est $[X_1 = 2]$. Comme les deux durées sont au moins égales à un, le second équivaut à $X_1 = X_2 = 1$. Aucun troisième composant ne peut avoir atteint sa fin de vie au jour deux. Par conséquent,

$$A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]).$$

4. b) ii) Les deux événements de cette réunion sont disjoints, puisqu'ils imposent respectivement $X_1 = 2$ et $X_1 = 1$. L'indépendance de X_1 et X_2 , de même loi, donne

$$u_2 = p_2 + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = p_2 + p_1^2.$$

4. c) i) Question adaptée au programme actuel : la famille décalée est indexée par $i \geq 1$.

Si l'on incluait $i = 0$ dans la famille annoncée indépendante de X_1 , on aurait

$\tilde{X}_0 = X_1$, ce qui contredirait l'indépendance puisque la loi n'est pas constante. Les indices utiles à la suite sont tous au moins égaux à un.

Pour tout entier $r \geq 1$, la famille $(X_1, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r) = (X_1, X_2, \dots, X_{r+1})$ est une famille extraite de la suite de variables mutuellement indépendantes. Elle est donc indépendante. De plus, chaque $\tilde{X}_i = X_{i+1}$ a la même loi que X_1 . On a ainsi l'indépendance mutuelle et l'indépendance à l'égard de X_1 annoncées.

4. c) ii) Fixons $1 \leq k < n$ et supposons $X_1 = k$. Si $T_r = n$, alors $r \neq 1$, car $T_1 = k < n$.

Pour $r \geq 2$, l'égalité $T_r = n$ équivaut à

$$X_2 + \dots + X_r = n - k,$$

soit $\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_{r-1} = n - k$. Réciproquement, toute telle somme de durées décalées donne une panne au jour n après la première panne au jour k . En posant $j = r - 1$, on obtient exactement

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j \geq 1} [\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j = n - k].$$

La réunion de droite peut être limitée à $1 \leq j \leq n - k$, puisque chaque durée vaut au moins un.

4. c) iii) Notons B la réunion de droite. Elle est fonction de $X_2, \dots, X_{n-k+1}$ et est donc indépendante de X_1 , par le lemme des coalitions. Les vecteurs finis de durées décalées ont la même loi que les vecteurs correspondants de la suite initiale. Par conséquent, $P(B) = P(A_{n-k}) = u_{n-k}$.

L'hypothèse $p_k > 0$ permet de conditionner :

$$P_{[X_1=k]}(A_n) = \frac{P([X_1 = k] \cap B)}{p_k} = \frac{p_k P(B)}{p_k} = u_{n-k}.$$

4. d) Les événements $[X_1 = k]$, pour $k \geq 1$, forment un système complet. Pour $k > n$, la première panne survient après le jour n : l'intersection avec A_n est vide. Pour $k = n$, cette première panne a lieu au jour n , donc $P(A_n | X_1 = n) = 1 = u_0$. Pour $1 \leq k < n$, la question précédente s'applique. La formule des probabilités totales donne ainsi

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} p_k u_{n-k} + p_n u_0 = \sum_{k=1}^n p_k u_{n-k}.$$

Cette dernière identité reste valable lorsque certains p_k sont nuls : on écrit alors directement $P(A_n \cap [X_1 = k]) = p_k u_{n-k}$, qui vaut zéro pour un terme de probabilité nulle. Cela permettra son utilisation en question 6 sans conditionnement interdit.

4. e) Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : la liste Python commence à l'indice zéro, donc p_j est stocké dans $P[j - 1]$. On initialise $u_0 = 1$, puis on applique la récurrence de 4(d) en calculant les valeurs dans l'ordre croissant.

Python

```
def panne(P):
    n = len(P)
    u = [0.0] * (n + 1)
    u[0] = 1.0
    for i in range(1, n + 1):
        for j in range(1, i + 1):
            u[i] = u[i] + P[j - 1] * u[i - j]
    return u[n]
```

La liste u possède $n + 1$ cases afin de stocker $u_0, \dots, u_n$. Dans la boucle extérieure, i parcourt les jours de 1 à n . Dans la boucle intérieure, j parcourt 1, $\dots$, i , donc $0 \leq i - j \leq i - 1$: les valeurs utilisées ont déjà été calculées. La valeur renvoyée est u_n , et non la liste des probabilités p_j . Aucun import n'est nécessaire. Les probabilités fournies sont celles du modèle ; les seuls n premiers termes de leur loi suffisent pour ce calcul.

5. a) Avec $q = 1 - \lambda \in]0, 1[$, on somme une série géométrique :

$$P(X_1 > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \lambda q^{j-1} = \lambda \frac{q^k}{1-q} = q^k = (1-\lambda)^k.$$

5. b) L'événement $[X_1 = k+1]$ est inclus dans $[X_1 > k]$, de probabilité $q^k > 0$. Ainsi

$$P_{[X_1 > k]}(X_1 = k+1) = \frac{\lambda q^k}{q^k} = \lambda.$$

La probabilité de panne le jour suivant, sachant que le composant a survécu k jours, est donc toujours λ .

5. c) Utilisons la récurrence 4(d). Pour $n = 1$, $u_1 = p_1 = \lambda$. Supposons $u_r = \lambda$ pour tous les entiers $1 \leq r < n$. Il faut isoler le terme $r = 0$, car $u_0 = 1$. Pour $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda \lambda q^{j-1} + \lambda q^{n-1} = \lambda^2 \frac{1-q^{n-1}}{1-q} + \lambda q^{n-1} = \lambda(1-q^{n-1}) + \lambda q^{n-1} = \lambda.$$

La récurrence est établie : pour tout $n \geq 1$, $P(A_n) = \lambda$.

6. a) Les probabilités p_j sont positives ou nulles et leur somme vaut un. Or $p_1 + p_2 = 1$, d'où

$$\sum_{j \geq 3} p_j = 0.$$

Tous ces termes étant positifs ou nuls, $p_j = 0$ pour chaque $j \geq 3$.

6. b) L'identité de 4(d), valable aussi en présence de probabilités nulles, se réduit à

$$u_n = p u_{n-1} + (1-p) u_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

La seconde ligne de la relation matricielle est $u_{n-1} = u_{n-1}$. Les deux lignes réunies donnent

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$

6. c) i) On recherche deux vecteurs propres simples. Un calcul direct donne

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} = (p-1) \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

car $p(p-1) + 1 - p = (p-1)^2$. Les deux valeurs propres 1 et $p-1$ sont distinctes, puisque $0 < p < 1$. Les deux vecteurs sont donc libres et forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Posons

$$S = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}.$$

On a $MS = SD$ et S est inversible, d'où $M = SDS^{-1}$. En résolvant $x = a + (p-1)b$, $y = a + b$, on obtient $b = (y-x)/(2-p)$ et $a = (x + (1-p)y)/(2-p)$. Ainsi

$$S^{-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Cette diagonalisation ne requiert aucun déterminant pour rechercher les valeurs propres.

6. c) ii) Pour $n \geq 2$, la diagonalisation donne

$$M^{n-1} = SD^{n-1}S^{-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & (p-1)^n \\ 1 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En distribuant ce produit selon les deux termes de D^{n-1} , on obtient

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut également vérifier séparément le produit associé à chaque colonne de S : le terme associé à 1 est la première matrice, et celui associé à $p-1$ est la seconde. La formule est aussi correcte pour $n=1$, où la somme vaut I_2 .

6. d) i) Méthode 1 — Utiliser la puissance matricielle

En itérant 6(b), puis en utilisant $u_1 = p$ et $u_0 = 1$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La première ligne de la formule 6(c)(ii) donne

$$u_n = \frac{p + (1-p)}{2-p} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} (p(1-p) + (p-1)).$$

Or $p(1-p) + p-1 = -(p-1)^2$. Donc

$$u_n = \frac{1 - (p-1)^{n+1}}{2-p} \quad (n \geq 1).$$

Cette expression donne aussi $u_0 = 1$ lorsque $n = 0$.

Méthode 2 — Étudier les différences successives

La relation $u_n = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2}$ entraîne

$$u_n - u_{n-1} = (p-1)(u_{n-1} - u_{n-2}).$$

En posant $d_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$, la suite (d_n) est géométrique de raison $p-1$, avec $d_1 = p-1$. Par conséquent, $d_n = (p-1)^n$. La somme télescopique donne, puisque $p-1 \neq 1$,

$$u_n = u_0 + \sum_{r=1}^n d_r = 1 + \frac{(p-1)(1-(p-1)^n)}{2-p} = \frac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}.$$

La première méthode exploite directement la diagonalisation demandée ; la seconde réduit une récurrence d'ordre deux à une suite géométrique, ce qui est utile lorsque seules les probabilités u_n sont recherchées.

6. d) ii) Comme $-1 < p-1 < 0$, on a $|p-1| < 1$ et $(p-1)^{n+1} \rightarrow 0$. Le dénominateur $2-p$ est constant et strictement positif. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2-p}.$$

Troisième partie

7. Chaque X_i a une espérance finie μ , car $\alpha > 1$. La somme T_k admet donc une espérance et la linéarité donne

$$E(T_k) = \sum_{i=1}^k E(X_i) = k\mu.$$

L'indépendance n'est pas nécessaire pour cette égalité.

8. a) Si $\alpha > 2$, la question 3(f) garantit un second moment fini. Les variables X_i sont indépendantes, donc leurs covariances deux à deux sont nulles. L'additivité de la variance pour cette somme indépendante donne

$$V(T_k) = \sum_{i=1}^k V(X_i) = k\sigma^2.$$

8. b) La variable T_k possède un second moment fini, et $k\varepsilon > 0$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique donc :

$$P(|T_k - E(T_k)| \geq k\varepsilon) \leq \frac{V(T_k)}{k^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}.$$

Comme $E(T_k) = k\mu$, c'est la majoration demandée.

8. c) Puisque $k > 0$, le complément de $[T_k/k \in]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[$ est $[|T_k - k\mu| \geq k\varepsilon]$. Ainsi

$$1 - \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} \leq P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[\right) \leq 1.$$

Le membre de gauche tend vers un : par encadrement, la probabilité centrale tend vers un.

9. a) Si $X_i \leq m$, alors $Y_i^{(m)} = X_i$ et $Z_i^{(m)} = 0$. Si $X_i > m$, alors $Y_i^{(m)} = 0$ et $Z_i^{(m)} = X_i$.
Les deux cas couvrent toutes les possibilités et prouvent $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

Pour tout m , on a $0 \leq Y_i^{(m)}, Z_i^{(m)} \leq X_i$. Ces deux variables ont donc une espérance finie. De plus, $Y_i^{(m)}$ est bornée par m et possède tous les moments utiles à la suite.

9. b) i) Le théorème de transfert donne, avec une série positive convergente puisque $Z_1^{(m)} \leq X_1$,

$$E(Z_1^{(m)}) = \sum_{j=m+1}^{+\infty} jP(X_1 = j).$$

La majoration de 3(d)(ii) s'applique à la loi de X_1 , d'où $jP(X_1 = j) \leq \alpha/j^\alpha$. En

sommant,

$$E(Z_1^{(m)}) \leq \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{j^\alpha}.$$

9. b) ii) La fonction $x \mapsto \alpha/x^\alpha$ est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour chaque entier $j \geq m+1$ et tout $x \in [j-1, j]$,

$$\frac{\alpha}{j^\alpha} \leq \frac{\alpha}{x^\alpha}.$$

En intégrant sur ce segment de longueur un, puis en sommant jusqu'à un entier $N > m$,

$$\sum_{j=m+1}^N \frac{\alpha}{j^\alpha} \leq \sum_{j=m+1}^N \int_{j-1}^j \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \int_m^N \frac{\alpha}{x^\alpha} dx.$$

L'intégrale généralisée à droite converge pour $\alpha > 1$. En passant à la limite dans cette inégalité de quantités positives, puis en utilisant 9(b)(i), on obtient la majoration demandée.

9. b) iii) Pour $R > m$, une primitive de $\alpha x^{-\alpha}$ est $\alpha x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$. On calcule d'abord sur le segment $[m, R]$:

$$\int_m^R \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha-1} (m^{1-\alpha} - R^{1-\alpha}).$$

Puisque $1-\alpha < 0$, $R^{1-\alpha} \rightarrow 0$. Ainsi

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}.$$

9. b) iv) Les trois questions précédentes donnent

$$0 \leq E(Z_1^{(m)}) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}.$$

Le majorant tend vers zéro lorsque $m \rightarrow +\infty$, car $\alpha > 1$. Par encadrement, $E(Z_1^{(m)}) \rightarrow 0$.

9. b) v) Les espérances existent et 9(a) permet d'écrire

$$E(Y_1^{(m)}) = E(X_1) - E(Z_1^{(m)}) = \mu - E(Z_1^{(m)}).$$

La question 9(b)(iv) entraîne donc $E(Y_1^{(m)}) \rightarrow \mu$.

9. c) i) Sur $[X_1 \leq m]$, on a $(Y_1^{(m)})^2 = X_1^2 \leq mX_1$, puisque $X_1 \geq 0$. Sur $[X_1 > m]$, le membre de gauche vaut zéro et le membre de droite est positif. L'inégalité $(Y_1^{(m)})^2 \leq mX_1$ est donc vraie partout.

9. c) ii) La variable $Y_1^{(m)}$ est bornée; sa variance existe. La formule de Koenig-Huygens et la question précédente donnent

$$V(Y_1^{(m)}) = E((Y_1^{(m)})^2) - E(Y_1^{(m)})^2 \leq E((Y_1^{(m)})^2) \leq mE(X_1) = m\mu.$$

9. d) Posons $C = \alpha/(\alpha - 1) > 0$. Comme $Cm^{1-\alpha} \rightarrow 0$, la définition d'une limite assure l'existence d'un entier $m_0 \geq 1$ tel que, pour tout $m \geq m_0$, $Cm^{1-\alpha} \leq \varepsilon$.

On peut, plus explicitement, choisir m_0 entier supérieur ou égal à $\max(1, (C/\varepsilon)^{1/(\alpha-1)})$: l'inégalité $m^{\alpha-1} \geq C/\varepsilon$ entraîne alors le résultat.

9. e) En sommant l'égalité de 9(a) pour $i = 1, \dots, k$, on obtient

$$T_k = \sum_{i=1}^k X_i = \sum_{i=1}^k Y_i^{(m)} + \sum_{i=1}^k Z_i^{(m)} = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}.$$

9. f) i) Les variables $Z_i^{(m)}$ sont intégrables et de même loi, car ce sont les mêmes fonctions de variables X_i de même loi. Par linéarité et par 9(b),

$$E(V_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^k E(Z_i^{(m)}) = kE(Z_1^{(m)}) \leq k \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}.$$

L'indépendance n'est pas requise pour cette espérance.

9. f) ii) On établit directement la majoration nécessaire. La variable $V_k^{(m)}$ est positive ou nulle et intégrable. En séparant dans sa somme d'espérance les valeurs $v \geq k\varepsilon$, on a

$$E(V_k^{(m)}) \geq \sum_{v \geq k\varepsilon} v P(V_k^{(m)} = v) \geq k\varepsilon \sum_{v \geq k\varepsilon} P(V_k^{(m)} = v) = k\varepsilon P(V_k^{(m)} \geq k\varepsilon).$$

La notation v parcourt ici les valeurs entières du support satisfaisant l'inégalité. Comme $k\varepsilon > 0$, on peut diviser et appliquer 9(f)(i) :

$$P(V_k^{(m)} \geq k\varepsilon) \leq \frac{E(V_k^{(m)})}{k\varepsilon} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}.$$

La preuve repose sur la définition de l'espérance discrète et ne suppose aucune inégalité supplémentaire connue.

9. g) i) Par 9(e), les espérances existant toutes,

$$E(U_k^{(m)}) = E(T_k) - E(V_k^{(m)}) = k\mu - E(V_k^{(m)}).$$

Avec 9(f)(i),

$$E(U_k^{(m)}) \geq k\mu - k \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}.$$

9. g) ii) La variable $V_k^{(m)}$ est positive ou nulle, donc $E(U_k^{(m)}) \leq k\mu$. D'après 9(g)(i) et le choix $m \geq m_0$ en 9(d),

$$k\mu - k\varepsilon \leq E(U_k^{(m)}) \leq k\mu.$$

Il en résulte $|E(U_k^{(m)}) - k\mu| \leq k\varepsilon$.

9. g) iii) L'inégalité triangulaire entraîne, pour chaque issue,

$$|U_k^{(m)} - k\mu| \leq |U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| + |E(U_k^{(m)}) - k\mu| \leq |U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| + k\varepsilon.$$

Ainsi $|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon$ implique $|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon$. L'inclusion de ces événements donne la comparaison de probabilités demandée.

9. g) iv) Pour m fixé, chaque $Y_i^{(m)}$ est une fonction de X_i seul. Le lemme des coalitions assure l'indépendance des $Y_i^{(m)}$. Ces variables sont bornées et de même loi ; leurs variances existent donc et valent toutes $V(Y_1^{(m)})$. Par additivité des variances et par 9(c)(ii),

$$V(U_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^k V(Y_i^{(m)}) = kV(Y_1^{(m)}) \leq km\mu.$$

Il n'est pas nécessaire que $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ soient indépendantes pour un même indice, et cette indépendance n'est pas utilisée.

9. g) v) La variable $U_k^{(m)}$ possède un second moment fini et $k\varepsilon > 0$. On applique Bienaymé-Tchebychev, puis 9(g)(iv) et 9(g)(iii) :

$$P(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon) \leq \frac{V(U_k^{(m)})}{k^2\varepsilon^2} \leq \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

9. h) i) La formule d'addition donne

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Comme $P(A \cup B) \leq 1$, on obtient $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$, sans hypothèse d'indépendance.

9. h) ii) Sur $A \cap B$, on a $0 \leq V_k^{(m)} < k\varepsilon$ et $k(\mu - 2\varepsilon) < U_k^{(m)} < k(\mu + 2\varepsilon)$. L'égalité de 9(e) donne donc

$$T_k > k(\mu - 2\varepsilon) > k(\mu - 3\varepsilon), \quad T_k < k(\mu + 2\varepsilon) + k\varepsilon = k(\mu + 3\varepsilon).$$

L'événement $A \cap B$ est donc inclus dans $[T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[$. En appliquant

9(h)(i),

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geq P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1,$$

ce qui est précisément l'inégalité annoncée.

9. h) iii) Par complémentation et par 9(f)(ii),

$$P(A) \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}.$$

Le complément de B est $[|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon]$. D'après 9(g)(v),

$$P(B) \geq 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

On reporte ces deux minoration dans 9(h)(ii) : pour tout entier $m \geq m_0$ et tout $k \geq 1$,

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

Une minoration éventuellement négative pour de petites valeurs de k reste valide ; elle devient utile dans le passage à la limite.

9. h) iv) Pour $k \geq 2$, choisissons $m_k = \lceil \sqrt{k} \rceil$, le plus petit entier supérieur ou égal à $\sqrt{k}$.

Il vérifie

$$\sqrt{k} \leq m_k < \sqrt{k} + 1 < 2\sqrt{k}.$$

Comme $m_k \rightarrow +\infty$, on a $m_k \geq m_0$ pour k assez grand. Puisque $1 - \alpha < 0$, la première inégalité donne $m_k^{1-\alpha} \leq k^{(1-\alpha)/2}$; la dernière donne $m_k/k < 2/\sqrt{k}$. La question précédente fournit donc, pour k assez grand,

$$1 - \frac{\alpha}{(\alpha - 1)\varepsilon} k^{(1-\alpha)/2} - \frac{2\mu}{\varepsilon^2 \sqrt{k}} \leq P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right) \leq 1.$$

Les deux termes retranchés tendent vers zéro, car $\alpha > 1$. Par encadrement,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right) = 1.$$

En particulier, tout intervalle $]\mu - \eta, \mu + \eta[$ avec $\eta > 0$ est couvert par cette conclusion en choisissant $\varepsilon = \eta/3$. La concentration de la moyenne autour de μ est donc établie même lorsque $1 < \alpha \leq 2$, sans supposer l'existence d'une variance.

Relevé des adaptations

4(c). L'indice de la famille décalée $\widetilde{X}_i = X_{i+1}$ est précisé : $i \geq 1$. Inclure $i = 0$ dans la famille annoncée indépendante de X_1 serait contradictoire. Tous les indices utilisés dans les questions suivantes sont inchangés.

4(e). Code adapté en Python. La liste stocke p_j à l'indice $j - 1$ et la récurrence utilise une liste de longueur $n + 1$ pour conserver $u_0 = 1$. La demande de rédaction d'un programme est conservée.