



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2015

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les trois parties sont largement indépendantes. Dans les deux dernières parties, on n'utilise de la partie I que les résultats des questions 5(f)(iii) et 5(g), que l'on pourra admettre si besoin. Dans tout l'énoncé, « positif » signifie « positif ou nul », sauf indication contraire.

I — Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on notera $\llbracket a, b \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z} : a \leq k \leq b\}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b .

Pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels et I un ensemble fini non vide d'entiers naturels, on notera $\min_{i \in I} x_i$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i : i \in I\}$. Par exemple,

$$\min_{i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}.$$

1) Un exemple : déterminer $\min_{i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

2) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs.

(a) Pour un entier naturel n fixé, on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n(k) = \min_{i \in \llbracket n, n+k \rrbracket} x_i$. Montrer que la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante.

(b) En déduire que la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est convergente. On note $u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k)$.

(c) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ admet une limite, qui peut être $+\infty$. Cette limite est dite limite inférieure de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ et est notée $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

3) Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n \geq 0}$ et $(z_n)_{n \geq 0}$ définies par $y_n = 1 + (-1)^n$ et par $z_n = 2$ si n est pair, $z_n = n$ si n est impair.

(a) Expliciter, pour $n \geq 0$ et $k \geq 1$, les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n \geq 0}$ et $(z_n)_{n \geq 0}$.

(b) Déterminer $\liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} z_n$.

4)

(a) On suppose ici que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ , alors $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

(b) Montrer que si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergent vers un réel ℓ , alors $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

(c)(i) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des réels donnés, avec $r \geq 1$, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\alpha_i \in I$. Montrer que $\min_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \alpha_i \in I$.

(c)(ii) Démontrer que si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels positifs convergeant vers un réel positif ℓ , on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

5) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(a) Pour $x \geq 0$ fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi_x(h) = \min_{u \in [x, x+h]} f(u)$, pour $h \geq 0$. Montrer que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(d) En déduire que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_x$ existe, en notant qu'elle peut valoir $+\infty$. On l'appelle la limite inférieure de f et on la note $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2 - x$ pour $x \in [1, 2]$, et telle que $f(x) = f(x + 2)$ pour tout $x \geq 0$; on dit que f est périodique de période 2.

(e)(i) Représenter graphiquement f sur le segment $[0, 4]$.

(e)(ii) Que vaut $\varphi_x(h)$ pour $x \geq 0$ et $h \geq 2$?

(e)(iii) En déduire Φ_x , puis $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(f) La fonction f est de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations de 5(a) et 5(b).

(f)(i) Soit $x \geq 0$. Montrer que, pour tout $h \geq 0$, on a $f(x) \geq \varphi_x(h)$.

(f)(ii) En déduire l'inégalité $\Phi_x \leq f(x)$.

(f)(iii) On suppose que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$. Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que, pour tout $x \geq x_0$, on a $f(x) \geq \varepsilon$.

(g) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$, où ℓ est un réel positif. Montrer que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \ell$.

II — Lois sous-exponentielles

Dans la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On notera, sous réserve d'existence, $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X .

Si X est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F , on notera systématiquement $\overline{F}$ la queue de répartition définie par $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ pour tout $x \geq 0$.

6) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n , on pose $p_X(n) = P(X = n)$, $p_Y(n) = P(Y = n)$ et $p_{X+Y}(n) = P(X + Y = n)$. Montrer que

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^n p_X(k)p_Y(n-k).$$

Pour les seules variables exponentielles indépendantes de même paramètre de la question 7, on admet le résultat particulier suivant : si f est leur densité commune, alors leur somme admet une densité nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et donnée, pour $x \geq 0$, par

$$(f * f)(x) = \int_0^x f(u)f(x-u) du.$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de $X + Y$.

7) Soit $\lambda > 0$ et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ . On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prend, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

(a) Expliciter, pour $x \geq 0$, $F(x)$ et $\bar{F}(x)$.

(b) Calculer $(f * f)(x)$ pour tout $x \geq 0$.

(c) En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout $x \geq 0$.

(d) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}_{X+Y}(x)}{\bar{F}(x)} = +\infty$.

8) Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F . On dit que sa loi est à support illimité à droite si, pour tout $x \geq 0$, $\bar{F}(x) > 0$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F .

(a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\bar{F}_{X+Y}(x) \geq P(\max(X, Y) > x)$.

(b) Montrer que $P(\max(X, Y) > x) = 1 - F(x)^2$.

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(x)^2}{\bar{F}(x)} = 2$.

(d) En déduire que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}_{X+Y}(x)}{\bar{F}(x)} \geq 2$. Ici, même si les fonctions de répartition ne sont pas continues, cette écriture signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, le quotient est supérieur ou égal à $2 - \varepsilon$ pour tout x assez grand.

9) Soit X une variable aléatoire positive, de fonction de répartition F , dont la loi est à support illimité à droite. On dit que cette loi est sous-exponentielle si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}_{X+Y}(x)}{\bar{F}(x)} = 2, \text{ où } Y \text{ est une variable aléatoire indépendante de } X \text{ et de même}$$

loi.

On considère deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

(a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{[X+Y > x]}(X > x) = \frac{1}{2}$.

(b) En déduire, en utilisant la question 8(c), que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(\max(X, Y) > x)} = 1$.

(c) Démontrer l'égalité

$$P(X + Y > x) = P([X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x]) + P(\max(X, Y) > x).$$

(d) Conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P([X + Y > x] \cap [\max(X, Y) \leq x])}{P(\max(X, Y) > x)} = 0$.

(e) Interpréter le résultat précédent.

III — Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, supposée nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et F la fonction de répartition associée. On reste dans le cadre des densités ayant des limites finies à gauche et à droite en tout point réel. On dit que la loi définie par f possède une queue lourde si, pour tout $\lambda > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x} dx$ diverge, c'est-à-dire si

$$\forall \lambda > 0, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(x)e^{\lambda x} dx = +\infty.$$

10) Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que, si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

11) Étude de quelques lois particulières.

(a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

(b) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.

(b)(i) Montrer que f est une densité de probabilité.

(b)(ii) Soit $\lambda > 0$. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que, pour tout $x \geq x_0$, on ait $\frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geq 1$.

(b)(iii) En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

(c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et $X = e^Z$.

(c)(i) Déterminer une densité f de X .

(c)(ii) Soit $\lambda > 0$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\lambda x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x]$?

(c)(iii) En déduire qu'il existe un réel $x_0 > 0$ tel que $\forall x \geq x_0, f(x)e^{\lambda x} \geq 1$.

(c)(iv) En déduire que la loi de X est à queue lourde.

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite, admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée. On pose, pour $x \geq 0$, $r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ et $R(x) = -\ln \bar{F}(x)$.

12) Montrer que $\bar{F}(x) = \exp \left(- \int_0^x r(y) dy \right)$.

13) On suppose que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$.

(a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que, pour tout $x \geq x_0$, $\bar{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$.

(b) Soit λ tel que $0 < \lambda < \varepsilon$ et soit $A > 0$. Montrer que

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x) dx = 1 - \bar{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda \int_0^A e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx.$$

(c) Conclure que $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

- 14) On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance $E(Z)$, alors, pour tout $\alpha > 0$, $P(Z > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Z)$.

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

(a) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $c = E(e^{\lambda X})$ existe.

(b) Soit $x > 0$. Montrer que $\bar{F}(x) \leq ce^{-\lambda x}$.

(c) Montrer que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} \geq \lambda > 0$.

La condition $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. On introduit une autre notion plus simple dont on montrera qu'elle suffit à assurer cette propriété.

- 15) Soit X une variable aléatoire positive, de fonction de répartition F , dont la loi est à support illimité à droite. On dit qu'elle possède une queue longue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$ et tout $y \in [0, 1]$,

$$\left| \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi et satisfait aux hypothèses posées avant la question 12.

(a) Montrer que, pour tout $y \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} = 0$.

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x+y)} = 0$.

(c) Montrer que, pour tout $y \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{[X > x]}(X > x+y) = 1$.

(d) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (R(x+1) - R(x)) = 0$.

- 16) Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue, dans le même cadre que précédemment.

(a) Soit $\lambda > 0$ fixé.

(a)(i) Montrer qu'il existe $x_0 > 0$ tel que, pour tout $x \geq x_0$ et tout $y \in [0, 1]$,
 $\overline{F}(x + y) \geq \overline{F}(x)e^{-\lambda/2}$.

Indication : utiliser la définition donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε , à expliciter.

(a)(ii) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\overline{F}(x_0 + n) \geq \overline{F}(x_0)e^{-\lambda n/2}$.

(a)(iii) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0 + n) = +\infty$.

(b) Justifier que, pour tout $\lambda > 0$, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.

(d) Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.