



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2015

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

I — Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

1) Les cinq valeurs, dans l'ordre des indices, sont $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$. Les seules valeurs négatives sont $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$, avec $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$. Le minimum demandé est donc $-\frac{1}{2}$, atteint pour $i = 1$.

2)(a) Lorsque k augmente d'une unité, on ajoute un élément à l'ensemble sur lequel on prend le minimum :

$$u_n(k+1) = \min(u_n(k), x_{n+k+1}) \leq u_n(k).$$

Ainsi, pour chaque n fixé, $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante.

2)(b) Tous les x_i étant positifs, $u_n(k) \geq 0$. La suite est donc décroissante et minorée ; le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel $u_n \geq 0$. De plus, $u_n(k) \leq x_n$, donc $0 \leq u_n \leq x_n$.

2)(c) L'ensemble $\llbracket n+1, n+1+k \rrbracket$ est inclus dans $\llbracket n, n+k+1 \rrbracket$. Par conséquent,

$$u_n(k+1) = \min(x_n, u_{n+1}(k)) \leq u_{n+1}(k).$$

Les deux membres convergent lorsque $k \rightarrow +\infty$. Le passage à la limite préserve l'inégalité et donne $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante.

2)(d) La suite (u_n) est croissante et positive. Si elle est majorée, elle converge vers un réel positif ; sinon, elle tend vers $+\infty$. Dans les deux cas, la limite inférieure de (x_n) est bien définie dans $[0, +\infty]$.

3)(a) Pour la suite (y_n) , les termes pairs valent 2 et les termes impairs valent 0. Dès que $k \geq 1$, l'intervalle $\llbracket n, n+k \rrbracket$ contient un entier impair, d'où $u_n(k) = 0$.

Pour la suite (z_n) , tout indice pair donne la valeur 2. Les valeurs prises aux indices impairs sont les indices eux-mêmes, donc augmentent avec ceux-ci. Pour $k \geq 1$, il y a au moins un indice de chaque parité. Si n est pair, le premier indice impair est $n+1$, donc $u_n(k) = \min(2, n+1)$. Si n est impair, le premier indice impair est n , donc $u_n(k) = \min(2, n)$.

Ainsi, indépendamment de $k \geq 1$, le minimum vaut 1 pour $n = 0$ ou $n = 1$, et 2 pour

$n \geq 2$.

3)(b) Pour (y_n) , tous les u_n valent 0, d'où $\liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

Pour (z_n) , on a $u_0 = u_1 = 1$ et $u_n = 2$ pour $n \geq 2$. Ainsi, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} z_n = 2$. La suite (z_n) ne converge pourtant pas : ses termes impairs tendent vers $+\infty$ et ses termes pairs valent 2.

4)(a) La croissance de (x_n) donne $x_i \geq x_n$ pour tout $i \geq n$. Le minimum sur $\llbracket n, n+k \rrbracket$ est donc x_n , pour tout k . Il en résulte $u_n = x_n$. Si $x_n \rightarrow \ell$, alors $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

4)(b) La décroissance de (x_n) donne $u_n(k) = x_{n+k}$. Pour n fixé, $x_{n+k} \rightarrow \ell$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, donc $u_n = \ell$. La suite (u_n) est constante égale à ℓ ; sa limite, donc la limite inférieure de (x_n) , vaut ℓ .

4)(c)(i) Un ensemble fini non vide de réels possède un minimum, qui est l'un de ses éléments. Il existe donc $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\min_i \alpha_i = \alpha_j$. Comme $\alpha_j \in I$, le minimum appartient à I .

4)(c)(ii) Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $x_n \rightarrow \ell$, il existe N tel que $\ell - \varepsilon/2 < x_i < \ell + \varepsilon/2$ pour tout $i \geq N$.

Pour tout $n \geq N$ et tout $k \geq 0$, le résultat précédent, appliqué à cet intervalle ouvert, donne

$$\ell - \varepsilon/2 < u_n(k) < \ell + \varepsilon/2.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, les inégalités deviennent éventuellement larges :

$\ell - \varepsilon/2 \leq u_n \leq \ell + \varepsilon/2$. Ainsi, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ pour $n \geq N$. La suite (u_n) converge donc vers ℓ , ce qui prouve $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

5)(a) Pour chaque $h \geq 0$, la continuité de f sur le segment $[x, x+h]$ garantit l'existence du minimum ; si $h = 0$, ce minimum vaut simplement $f(x)$. Lorsque $0 \leq h_1 \leq h_2$, l'inclusion $[x, x+h_1] \subset [x, x+h_2]$ entraîne $\varphi_x(h_2) \leq \varphi_x(h_1)$. La fonction φ_x est donc décroissante.

5)(b) Pour tout h , on a $0 \leq \varphi_x(h) \leq f(x)$. La fonction φ_x , décroissante et minorée, possède une limite finie $\Phi_x \in [0, f(x)]$ à l'infini.

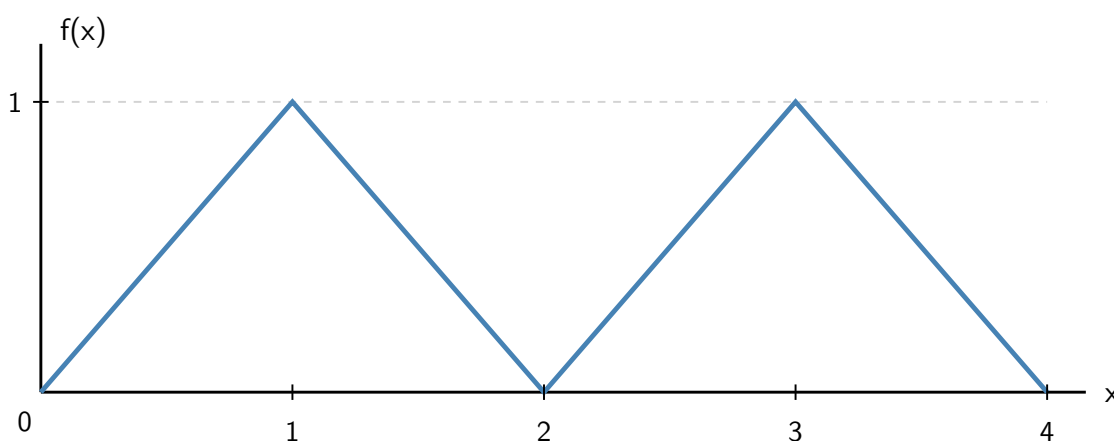
5)(c) Prenons $0 \leq x \leq y$ et $t \geq 0$. L'inclusion $[y, y+t] \subset [x, y+t]$ donne

$$\varphi_x(y - x + t) \leq \varphi_y(t).$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, les deux membres tendent respectivement vers Φ_x et Φ_y . Ainsi, $\Phi_x \leq \Phi_y$, ce qui établit la croissance demandée.

5)(d) La fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante et positive. Le théorème de la limite monotone assure qu'elle possède une limite dans $[0, +\infty]$. Cette limite est, par définition, $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5)(e)(i) Sur $[0, 4]$, la périodicité complète les deux formules de départ en $f(x) = x - 2$ sur $[2, 3]$ et $f(x) = 4 - x$ sur $[3, 4]$. La représentation est donc la ligne brisée reliant les cinq points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$ et $(4, 0)$.



5)(e)(ii) Les zéros de f sont les entiers pairs positifs ou nuls. Tout segment $[x, x + h]$ de longueur au moins 2 contient un tel entier : il suffit de prendre le premier entier pair supérieur ou égal à x , dont la distance à x est inférieure à 2. Comme $f \geq 0$, son minimum sur le segment vaut donc 0. Ainsi, $\varphi_x(h) = 0$ pour $h \geq 2$.

5)(e)(iii) Pour chaque x , la fonction φ_x est nulle à partir de $h = 2$. Sa limite vaut $\Phi_x = 0$. Il en résulte $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5)(f)(i) Le point x appartient au segment $[x, x + h]$. Le minimum de f sur ce segment est donc inférieur ou égal à la valeur de f en x , soit $\varphi_x(h) \leq f(x)$.

5)(f)(ii) L'inégalité précédente étant vraie pour tout h , le passage à la limite lorsque $h \rightarrow +\infty$ donne $\Phi_x \leq f(x)$.

5)(f)(iii) Notons $L = \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$. Si L est fini, prenons $\varepsilon = L/2$; si $L = +\infty$, prenons $\varepsilon = 1$. Dans les deux cas, la convergence $\Phi_x \rightarrow L$ assure qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $\Phi_x \geq \varepsilon$ pour tout $x \geq x_0$. D'après 5(f)(ii), $f(x) \geq \Phi_x \geq \varepsilon$, ce qui établit la propriété.

5)(g) Si $\ell = 0$, la conclusion résulte directement de la positivité de f . Supposons $\ell > 0$ et fixons $\eta \in]0, \ell[$. Il existe $A \geq 0$ tel que $g(t) \geq \ell - \eta$ pour tout $t \geq A$.

Pour $x \geq A$, $h \geq 0$ et $u \in [x, x+h]$, on a $f(u) \geq g(u) \geq \ell - \eta$. Par conséquent, $\varphi_x(h) \geq \ell - \eta$, puis $\Phi_x \geq \ell - \eta$. En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\liminf f \geq \ell - \eta$. Comme ceci vaut pour tout $\eta \in]0, \ell[$, on conclut $\liminf f \geq \ell$.

II — Lois sous-exponentielles

6) Pour $n \in \mathbb{N}$, les événements $[X = k] \cap [Y = n - k]$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, sont deux à deux incompatibles et leur réunion est $[X + Y = n]$, puisque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Par additivité finie,

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k).$$

L'indépendance de X et Y donne $P(X = k, Y = n - k) = p_X(k)p_Y(n - k)$. On obtient donc exactement la formule annoncée.

Question adaptée au programme actuel pour le résultat suivant la question 6. Résultat admis dans cette version adaptée : pour deux variables exponentielles indépendantes de même paramètre, la somme possède une densité nulle sur $\mathbb{R}_-$ et donnée par

$(f * f)(x) = \int_0^x f(u)f(x-u) du$ pour $x \geq 0$. Cette admission concerne seulement le couple utilisé en 7; elle permet le calcul de sa densité, puis de sa fonction de répartition, sans supposer connue une formule générale pour les sommes de variables à densité.

7)(a) La fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$. Ainsi, $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x} > 0$. Pour mémoire, $F(x) = 0$ pour $x < 0$.

7)(b) Dans le résultat particulier admis, lorsque $0 \leq u \leq x$, le produit des densités est

constant par rapport à u :

$$f(u)f(x-u) = \lambda^2 e^{-\lambda u} e^{-\lambda(x-u)} = \lambda^2 e^{-\lambda x}.$$

Par intégration sur $[0, x]$, $(f * f)(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.

7)(c) La somme est positive et possède la densité calculée. Pour $x \geq 0$,

$$F_{X+Y}(x) = \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt.$$

Une intégration par parties sur le segment $[0, x]$, avec $u(t) = \lambda t$ et $v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, donne

$$F_{X+Y}(x) = [-\lambda t e^{-\lambda t}]_0^x + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}.$$

La formule vaut aussi en $x = 0$ et $F_{X+Y}(x) = 0$ pour $x < 0$.

7)(d) D'après la question précédente, $\overline{F}_{X+Y}(x) = (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}$. Comme $\overline{F}(x) = e^{-\lambda x} > 0$,

$$\frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \lambda x \rightarrow +\infty.$$

Une loi exponentielle n'est donc pas sous-exponentielle au sens de la définition donnée en 9.

8)(a) Si $\max(X, Y) > x$, au moins une des deux variables dépasse x . L'autre étant positive, on a $X + Y > x$. Ainsi, $[\max(X, Y) > x] \subset [X + Y > x]$. La croissance de la probabilité donne $P(\max(X, Y) > x) \leq \overline{F}_{X+Y}(x)$.

8)(b) L'événement complémentaire est $[\max(X, Y) \leq x] = [X \leq x] \cap [Y \leq x]$.

L'indépendance et l'égalité des lois donnent sa probabilité $F(x)^2$. Donc

$$P(\max(X, Y) > x) = 1 - F(x)^2.$$

8)(c) Le support illimité garantit $1 - F(x) > 0$ et autorise la simplification :

$$\frac{1 - F(x)^2}{\overline{F}(x)} = \frac{(1 - F(x))(1 + F(x))}{1 - F(x)} = 1 + F(x).$$

Toute fonction de répartition vérifie $F(x) \rightarrow 1$ à l'infini. Le quotient tend donc vers 2.

8)(d) Question adaptée au programme actuel : le sens de l'inégalité de limite inférieure a été précisé pour les lois éventuellement discrètes, puisque 5 définissait cette notion seulement pour les fonctions continues.

D'après 8(a) et 8(b),

$$\frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 1 + F(x).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $F(x) \rightarrow 1$, on a $1 + F(x) \geq 2 - \varepsilon$ pour tout x assez grand. Le quotient satisfait la même minoration, ce qui est précisément le sens de la conclusion demandée. Aucun résultat de continuité des fonctions de répartition n'est nécessaire.

9)(a) L'événement $[X > x]$ est inclus dans $[X + Y > x]$ puisque $Y \geq 0$. De plus, $P(X + Y > x) \geq \overline{F}(x) > 0$, donc la probabilité conditionnelle est bien définie. On a

$$P_{[X+Y>x]}(X > x) = \frac{P(X > x)}{P(X + Y > x)} = \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}_{X+Y}(x)}.$$

Le caractère sous-exponentiel donne la limite $\frac{1}{2}$.

9)(b) D'après 8(b), $P(\max(X, Y) > x) = 1 - F(x)^2 > 0$. En divisant numérateur et dénominateur par $\overline{F}(x)$, on obtient

$$\frac{P(X + Y > x)}{P(\max(X, Y) > x)} = \frac{\overline{F}_{X+Y}(x)/\overline{F}(x)}{(1 - F(x)^2)/\overline{F}(x)} \rightarrow \frac{2}{2} = 1.$$

La limite du numérateur provient de 9(a), ou directement de la définition, et celle du dénominateur provient de 8(c).

9)(c) Notons $A_x = [X + Y > x]$ et $B_x = [\max(X, Y) > x]$. On sait que $B_x \subset A_x$.

L'événement A_x est donc la réunion disjointe de $A_x \cap B_x^c$ et de B_x . L'additivité donne

$$P(A_x) = P(A_x \cap B_x^c) + P(B_x),$$

ce qui est l'égalité demandée.

9)(d) Puisque $P(B_x) > 0$, l'égalité précédente donne

$$\frac{P(A_x \cap B_x^c)}{P(B_x)} = \frac{P(A_x)}{P(B_x)} - 1.$$

D'après 9(b), le membre de droite tend vers 0. Le quotient demandé tend donc vers 0.

9)(e) Pour un seuil très élevé, le dépassement par la somme est essentiellement dû au dépassement du seuil par une des deux variables. Les dépassements obtenus alors que les deux termes restent individuellement inférieurs ou égaux au seuil ont une probabilité négligeable par rapport à celle du dépassement par le maximum.

On peut également exprimer cette interprétation par une probabilité conditionnelle : $P(B_x | A_x) = P(B_x)/P(A_x) \rightarrow 1$. Ainsi, sachant que la somme dépasse un seuil élevé, la probabilité qu'au moins un terme dépasse à lui seul ce seuil tend vers 1.

III — Problèmes de queues

10) Raisonnons par contraposition. Si la loi n'est pas à support illimité à droite, il existe $a \geq 0$ tel que $P(X > a) = 0$. Alors $X \leq a$ presque sûrement. Pour tout $\lambda > 0$ et tout $A \geq 1$, l'intégrale positive vérifie

$$\int_1^A e^{\lambda x} f(x) dx \leq e^{\lambda \max(a,1)} \int_1^{\max(a,1)} f(x) dx \leq e^{\lambda \max(a,1)}.$$

En effet, l'intégrale de f au-delà de a est nulle, et la même propriété vaut pour son produit par une fonction bornée sur chaque segment. Les intégrales partielles sont donc croissantes et majorées ; l'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge. La loi n'est pas à queue lourde. Par contraposition, toute loi à queue lourde est à support illimité à droite.

11)(a) Notons $a > 0$ le paramètre de la loi exponentielle afin de réserver λ au paramètre de la définition. Sa densité sur $\mathbb{R}_+$ est $f(x) = ae^{-ax}$. Prenons $\lambda = a/2 > 0$. Alors

$$\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x} dx = a \int_1^{+\infty} e^{-ax/2} dx = 2e^{-a/2} < +\infty.$$

La définition exige la divergence pour tout $\lambda > 0$; elle est donc contredite. Une loi exponentielle n'est pas à queue lourde.

11)(b)(i) La fonction f est positive, continue sur chaque demi-droite et possède des limites finies en 0 : 0 à gauche et 1 à droite. Pour $A \geq 0$,

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A} \rightarrow 1.$$

La fonction est nulle sur les réels strictement négatifs ; son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut donc 1. C'est une densité de probabilité.

11)(b)(ii) Pour $\lambda > 0$, les croissances comparées donnent $\ln(1+x)/x \rightarrow 0$. Par conséquent,

$$\lambda x - 2 \ln(1+x) = x \left(\lambda - 2 \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \rightarrow +\infty.$$

Son exponentielle, égale à $e^{\lambda x}/(1+x)^2$, tend vers $+\infty$. Elle est donc supérieure ou égale à 1 pour tout x assez grand, ce qui fournit le réel x_0 demandé.

11)(b)(iii) Pour $A \geq \max(1, x_0)$, la positivité et la minoration précédente donnent

$$\int_1^A f(x) e^{\lambda x} dx \geq \int_{\max(1, x_0)}^A 1 dx = A - \max(1, x_0) \rightarrow +\infty.$$

Cette propriété est vraie pour tout $\lambda > 0$, donc la loi est à queue lourde.

11)(c)(i) Comme $X = e^Z > 0$, sa fonction de répartition F_X est nulle sur $] -\infty, 0]$. Pour $x > 0$, la stricte croissance du logarithme donne

$$F_X(x) = P(e^Z \leq x) = P(Z \leq \ln x) = \Phi(\ln x),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. En particulier, $F_X(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, donc F_X est continue en 0. Pour $x > 0$, elle est de classe C^1 et

$$F'_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right).$$

Une densité de X est donc la fonction donnée par cette formule pour $x > 0$ et par 0 pour $x \leq 0$. Sa limite en 0^+ est bien finie : avec $t = -\ln x \rightarrow +\infty$, son expression devient $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2+t}$, qui tend vers 0. Elle respecte donc le cadre des densités du programme.

11)(c)(ii) Les croissances comparées donnent $(\ln x)^2/x \rightarrow 0$ et $\ln x/x \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\lambda x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x = x \left(\lambda - \frac{(\ln x)^2}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right) \rightarrow +\infty.$$

11)(c)(iii) Pour $x > 0$, le produit recherché est strictement positif et son logarithme vaut

$$\ln(f(x)e^{\lambda x}) = \lambda x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x - \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

D'après la question précédente, cette expression tend vers $+\infty$. Elle est donc positive à partir d'un certain $x_0 > 0$. En prenant l'exponentielle, on obtient $f(x)e^{\lambda x} \geq 1$ pour $x \geq x_0$.

11)(c)(iv) Fixons $\lambda > 0$. La minoration de 11)(c)(iii) donne, pour $A \geq \max(1, x_0)$,

$$\int_1^A f(x)e^{\lambda x} dx \geq A - \max(1, x_0) \rightarrow +\infty.$$

Le paramètre $\lambda > 0$ étant arbitraire, la loi de X est à queue lourde.

12) La densité étant nulle sur les réels négatifs, on a $F(0) = P(X \leq 0) = 0$ et $\bar{F}(0) = 1$.

Le support illimité garantit $\bar{F}(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$, donc R et r sont bien définies.

La densité f est continue à droite en 0 et continue sur $]0, +\infty[$; la fonction $\bar{F}$ est donc dérivable pour $x > 0$, avec $\bar{F}'(x) = -f(x)$, et possède la dérivée à droite correspondante en 0.

Par dérivation de $R(x) = -\ln \bar{F}(x)$,

$$R'(x) = -\frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = r(x).$$

La fonction r est continue sur $\mathbb{R}_+$, en prenant en 0 sa valeur à droite. Le théorème fondamental de l'analyse sur $[0, x]$ donne

$$\int_0^x r(y) dy = R(x) - R(0) = R(x).$$

Il suffit de prendre l'exponentielle de $-R(x)$ pour conclure : $\bar{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x r(y) dy\right)$.

13)(a) La fonction $x \mapsto R(x)/x$ est continue et positive pour $x > 0$. Elle peut être prolongée continûment en 0 par la valeur $r(0)$: en effet, $R(0) = 0$ et R est dérivable à droite en 0, donc $R(x)/x \rightarrow R'_+(0) = r(0)$. On peut ainsi appliquer 5(f)(iii) à ce prolongement.

L'hypothèse de limite inférieure strictement positive fournit $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $R(x)/x \geq \varepsilon$ pour $x \geq x_0$. Alors $R(x) \geq \varepsilon x$, et donc $\overline{F}(x) = e^{-R(x)} \leq e^{-\varepsilon x}$.

13)(b) Sur le segment $[0, A]$, les fonctions $e^{\lambda x}$ et $\overline{F}(x)$ sont de classe C^1 , avec les dérivées à droite aux extrémités si nécessaire. Puisque $f = -\overline{F}'$, une intégration par parties donne

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x) dx = -[e^{\lambda x} \overline{F}(x)]_0^A + \lambda \int_0^A e^{\lambda x} \overline{F}(x) dx.$$

Comme $\overline{F}(0) = 1$, ceci devient l'identité demandée :

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x) dx = 1 - e^{\lambda A} \overline{F}(A) + \lambda \int_0^A e^{\lambda x} \overline{F}(x) dx.$$

13)(c) Pour $x \geq x_0$,

$$0 \leq e^{\lambda x} \overline{F}(x) \leq e^{-(\varepsilon - \lambda)x}.$$

Puisque $\varepsilon - \lambda > 0$, la fonction de droite est intégrable à l'infini et tend vers 0. Sur $[0, x_0]$, le membre central est continu, donc intégrable. Par comparaison, $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} \overline{F}(x) dx$ converge, et $e^{\lambda A} \overline{F}(A) \rightarrow 0$.

On peut maintenant passer à la limite dans l'identité sur segment de 13(b), ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx = 1 + \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} \overline{F}(x) dx < +\infty.$$

Il existe donc un paramètre strictement positif pour lequel l'intégrale définissant la queue lourde converge : la loi n'est pas à queue lourde.

14)(a) La négation de la définition d'une queue lourde assure l'existence de $\lambda > 0$ tel que $\int_1^A e^{\lambda x} f(x) dx$ ne tende pas vers $+\infty$. Ces intégrales sont croissantes en A , puisque l'intégrande est positive. Elles ont donc une limite finie : $\int_1^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$ converge.

Sur $[0, 1]$, on a $0 \leq e^{\lambda x} f(x) \leq e^{\lambda} f(x)$; l'intégrale y est finie. Ainsi, l'intégrale positive $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$ converge. Le théorème de transfert, applicable à la fonction continue $x \mapsto e^{\lambda x}$, donne l'existence de

$$c = E(e^{\lambda X}) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx.$$

Comme $X \geq 0$, on a $e^{\lambda X} \geq 1$ presque sûrement; par conséquent, $1 \leq c < +\infty$.

14)(b) Méthode 1 — Inégalité de Markov

La variable $Z = e^{\lambda X}$ est positive et son espérance c est finie, d'après 14(a). Pour $x > 0$, le nombre $e^{\lambda x}$ est strictement positif. L'inégalité rappelée dans le sujet donne

$$\overline{F}(x) = P(X > x) = P(e^{\lambda X} > e^{\lambda x}) \leq \frac{E(e^{\lambda X})}{e^{\lambda x}} = ce^{-\lambda x}.$$

Méthode 2 — Comparaison directe des intégrales

Sur $[x, +\infty[$, on a $e^{\lambda t} \geq e^{\lambda x}$. Les intégrales positives satisfont donc

$$c = \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) dt \geq \int_x^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) dt \geq e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} f(t) dt = e^{\lambda x} \overline{F}(x).$$

La division par $e^{\lambda x} > 0$ redonne la même majoration. La première méthode s'applique directement à une variable positive quelconque; la seconde rend visible la comparaison qui la sous-tend dans le cas d'une densité.

14)(c) Le support illimité garantit $\overline{F}(x) > 0$. La fonction logarithme étant croissante, la majoration précédente entraîne

$$\ln \overline{F}(x) \leq \ln c - \lambda x,$$

puis, pour $x > 0$, $R(x)/x \geq \lambda - \ln c/x$. Fixons $\eta > 0$. À partir d'un certain $A > 0$, $\ln c/x \leq \eta$ pour tout $x \geq A$, donc $R(x)/x \geq \lambda - \eta$. Les minima sur les segments situés

au-delà de A satisfont la même inégalité ; leurs limites, puis la limite inférieure, aussi. Il vient $\liminf_{x \rightarrow +\infty} R(x)/x \geq \lambda - \eta$. En laissant η tendre vers 0, on obtient $\liminf R(x)/x \geq \lambda > 0$.

Les questions 13 et 14 établissent, dans le cadre des hypothèses présentes, que la loi est à queue lourde si et seulement si $\liminf R(x)/x = 0$, car ce quotient est positif.

15)(a) Question adaptée au programme actuel pour la précision de l'hypothèse de support illimité et le maintien des hypothèses précédant 12. Ces précisions assurent que tous les quotients et la fonction R sont définis.

Fixons $y \in [0, 1]$. La définition d'une queue longue donne, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout x assez grand,

$$\left| \frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \right| = \left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Le quotient demandé tend donc vers 0. La définition fournit même une majoration valable simultanément pour tous les $y \in [0, 1]$.

15)(b) Pour $y \in [0, 1]$ fixé, posons $q_x = \overline{F}(x+y)/\overline{F}(x) > 0$. La question 15(a) donne $q_x \rightarrow 1$. Or

$$\frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x+y)} = \frac{q_x - 1}{q_x}.$$

Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1, donc ce quotient tend vers 0.

15)(c) Pour $y \geq 0$, l'événement $[X > x+y]$ est inclus dans $[X > x]$. La probabilité de ce dernier événement est $\overline{F}(x) > 0$. Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$P_{[X > x]}(X > x+y) = \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = q_x \rightarrow 1.$$

15)(d) Pour $y = 1$, le quotient positif $\overline{F}(x+1)/\overline{F}(x)$ tend vers 1. Par continuité de la fonction $q \mapsto -\ln q$ en 1,

$$R(x+1) - R(x) = -\ln \left(\frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} \right) \rightarrow -\ln 1 = 0.$$

Ce passage au logarithme porte sur un quotient dont la limite est strictement positive ; il ne repose pas sur une manipulation d'équivalents.

16)(a)(i) Comme $\lambda > 0$, le nombre $\varepsilon = 1 - e^{-\lambda/2}$ appartient à $]0, 1[$. Appliquons la définition d'une queue longue avec ce choix. Il existe $x_0 > 0$ tel que, pour $x \geq x_0$ et $y \in [0, 1]$,

$$\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} > 1 - \varepsilon = e^{-\lambda/2}.$$

En multipliant par $\overline{F}(x) > 0$ et en affaiblissant l'inégalité stricte, on obtient la minoration demandée.

16)(a)(ii) On applique 16)(a)(i) avec $y = 1$ aux points $x_0, x_0 + 1, \dots, x_0 + n - 1$. Pour tout $j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$,

$$\overline{F}(x_0 + j + 1) \geq e^{-\lambda/2} \overline{F}(x_0 + j).$$

Par récurrence, la première étape donne $\overline{F}(x_0 + 1) \geq e^{-\lambda/2} \overline{F}(x_0)$; si la formule est vraie à l'ordre n , l'inégalité au point $x_0 + n$ la propage à l'ordre $n + 1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\overline{F}(x_0 + n) \geq \overline{F}(x_0) e^{-\lambda n/2}.$$

16)(a)(iii) En multipliant l'inégalité précédente par $e^{\lambda(x_0+n)} > 0$, on obtient

$$e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0 + n) \geq e^{\lambda x_0} \overline{F}(x_0) e^{\lambda n/2}.$$

Le facteur $e^{\lambda x_0} \overline{F}(x_0)$ est strictement positif et $e^{\lambda n/2} \rightarrow +\infty$. Par minoration, le membre de gauche tend vers $+\infty$.

16)(b) Fixons $\lambda > 0$. D'après 16)(a)(iii), les valeurs de la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$ aux points $x_0 + n$ tendent vers $+\infty$. Une fonction bornée aurait des valeurs bornées sur toute suite de points de son domaine. Cette fonction n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}_+$. Le raisonnement vaut pour tout $\lambda > 0$.

16)(c) Le quotient $R(x)/x$ est positif pour $x > 0$, car $0 < \overline{F}(x) \leq 1$. Sa limite inférieure L appartient donc à $[0, +\infty]$. Supposons, par l'absurde, $L \neq 0$. Alors $L > 0$, y compris lorsque $L = +\infty$.

La question 13(a) fournit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que $\overline{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$ pour $x \geq A$. Il en résulte $e^{\varepsilon x} \overline{F}(x) \leq 1$ pour ces x . Pour $0 \leq x \leq A$, on a simplement $e^{\varepsilon x} \overline{F}(x) \leq e^{\varepsilon A}$, puisque $\overline{F}(x) \leq 1$. La fonction $x \mapsto e^{\varepsilon x} \overline{F}(x)$ serait donc bornée sur tout $\mathbb{R}_+$, ce qui contredit 16)(b) avec $\lambda = \varepsilon$. Ainsi, $L = 0$.

16)(d) Méthode 1 — Contraposition de la question 14

Si la loi n'était pas à queue lourde, 14(c) donnerait $\liminf R(x)/x \geq \lambda > 0$ pour un certain λ . Cela contredirait 16(c). Donc toute loi à queue longue, dans le cadre de densité fixé ici, possède une queue lourde.

Méthode 2 — Contradiction directe sur le moment exponentiel

Fixons $\lambda > 0$ et supposons que $\int_1^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) dt$ converge. L'intégrale sur $[0, 1]$ est finie, puisque $e^{\lambda t} f(t) \leq e^{\lambda} f(t)$. Le théorème de transfert donne alors $c = E(e^{\lambda X}) < +\infty$. Comme en 14(b), la comparaison des intégrales ou l'inégalité de Markov donne $e^{\lambda x} \overline{F}(x) \leq c$ pour tout $x \geq 0$. Ceci contredit 16(b). L'intégrale positive diverge donc pour chaque $\lambda > 0$, ce qui est exactement la définition d'une queue lourde.

La première méthode utilise le critère de limite inférieure construit dans le problème ; la seconde relie directement l'absence de borne exponentielle de la queue à la divergence de chaque moment exponentiel.

Relevé des adaptations

6, résultat suivant la question : l'admission générale sur les sommes de variables à densité a été remplacée par la seule formule particulière nécessaire au couple exponentiel de 7. Le calcul demandé en 7(b) est conservé, sans supposer connue une formule générale hors programme.

8(d) : la conclusion de limite inférieure est explicitée par une minoration valable à partir d'un certain seuil, afin de couvrir aussi les lois non continues auxquelles la définition de 5 ne s'appliquait pas directement.

15, préambule et questions 15–16 dépendantes : l'hypothèse de support illimité à droite est explicitée, ainsi que le maintien du cadre de densité précédant 12. Les divisions par la queue et l'utilisation de R sont ainsi justifiées.