



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2014

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

I — Autour de la loi de Benford

Les trois parties sont indépendantes.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x , et $\{x\}$ sa partie fractionnaire : $\{x\} = x - [x]$. On note $\ln z$ le logarithme en base dix du réel $z > 0$: $\ln z = \frac{\ln z}{\ln 10}$. On rappelle les propriétés suivantes, utilisables sans démonstration :

$$\forall z > 0, \quad 10^{\ln z} = z.$$

$$\forall z > 0, \forall z' > 0, \quad \ln(zz') = \ln z + \ln z'.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \ln(10^a) = a.$$

On a par exemple $\ln(100) = 2$ et $\ln(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$.

1) (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$x = 10^{\{ \ln x \}} 10^{[\ln x]}.$$

Cette décomposition est dite notation scientifique de x .

1) (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, le couple $(10^{\{ \ln x \}}, [\ln x])$ est l'unique couple $(\alpha, n) \in [1, 10[\times \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha 10^n$.

1) (c) Soit $x > 0$. On pose $\gamma = [10^{\{ \ln x \}}]$. Montrer que $\gamma \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Le nombre γ est appelé le premier chiffre significatif de x .

- 2) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq 9$, on pose $p_k = \ln(1 + \frac{1}{k})$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^9 p_k = 1.$$

La famille $(p_k)_{1 \leq k \leq 9}$ définit donc une loi de probabilité sur $\{1, 2, \dots, 9\}$ dite loi de Benford.

- 3) Soit X une variable aléatoire réelle strictement positive. On suppose que la variable aléatoire réelle $Y = \{\ln X\}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.

- 3) (a) Soit $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Montrer que

$$[10^Y] = k \iff k \leq 10^Y < k + 1.$$

- 3) (b) On considère la variable aléatoire $\Gamma = [10^{\{\ln X\}}]$, égale au premier chiffre significatif de X . Déterminer la loi de Γ .

- 4) Soit Y une variable aléatoire réelle admettant une densité g continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que :

(h1) g atteint son maximum M en un unique point $a_0 \in \mathbb{R}$;

(h2) g est croissante sur $] -\infty, a_0]$ et décroissante sur $[a_0, +\infty[$.

- 4) (a) i) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\{y\} = \{y - n\}$.

- 4) (a) ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la loi de $\{Y\}$ est identique à celle de $\{Y - n\}$.

- 4) (a) iii) Déterminer une fonction de densité $\tilde{g}$ continue de la variable aléatoire $Y - [a_0]$.

- 4) (a) iv) Montrer que $\tilde{g}$ admet un unique maximum en un point $\tilde{a}_0 \in [0, 1[$.
- 4) (a) v) Montrer que $\tilde{g}$ vérifie les conditions (h1) et (h2) ci-dessus, avec $\tilde{a}_0$ remplaçant a_0 .

On supposera donc désormais $a_0 \in [0, 1[$. On fixe $x \in]0, 1[$ et on note $I_{n,x} = [n, n+x[$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

- 4) (b) i) Soit φ une fonction positive, continue et croissante sur $[0, 1]$. Montrer, en utilisant un changement de variable, que

$$\int_0^x \varphi(t) dt \leq x \int_0^1 \varphi(u) du.$$

- 4) (b) ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq -1$, on a

$$\frac{1}{x} \int_{I_{n,x}} g(t) dt \leq \int_n^{n+1} g(t) dt.$$

On admettra qu'on montrerait de même, pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{x} \int_{I_{n,x}} g(t) dt \leq \int_{n-1+x}^{n+x} g(t) dt.$$

- 4) (b) iii) Montrer que

$$\frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \int_{I_{-n,x}} g(t) dt \leq \int_{-\infty}^0 g(t) dt$$

et

$$\frac{1}{x} \sum_{n \geq 2} \int_{I_{n,x}} g(t) dt \leq \int_{1+x}^{+\infty} g(t) dt.$$

4) (b) iv) Montrer que $\int_{I_{0,x}} g(u) du \leq xM$ et $\int_{I_{1,x}} g(u) du \leq xM$.

4) (b) v) Conclure que

$$\frac{1}{x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{I_{n,x}} g(u) du = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \int_{I_{-n,x}} g(u) du + \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} \int_{I_{n,x}} g(u) du \leq 1 + 2M.$$

On montre de même l'inégalité suivante, que l'on admettra :

$$\frac{1}{x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{I_{n,x}} g(u) du \geq 1 - 2M.$$

4) (b) vi) Montrer que l'événement $(\{Y\} < x)$ est égal à $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (Y \in I_{n,x})$.

4) (b) vii) En déduire que $|P(\{Y\} < x) - x| \leq 2M$.

5) Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que Z_n suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$. On pose $X_n = 10^{\sqrt{Z_n}}$ et $Y_n = \ln X_n = \sqrt{Z_n}$.

5) (a) Déterminer une densité g_n de la loi de Y_n , continue sur $\mathbb{R}$.

5) (b) Étudier les variations de g_n sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer son maximum.

5) (c) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$|P(\{Y_n\} < x) - x| \leq 2\sqrt{\frac{2}{n}} e^{-1/2}.$$

- 5) (d) Montrer que la suite $(\{Y_n\})_{n \geq 1}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1[$.

II — Répartition des valeurs dans une table numérique

On étudie la moyenne des valeurs prises par une fonction sur une table de logarithmes. Pour tout $\omega > 0$, on définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions

$$F_\omega(y) = \frac{\omega y}{8(1 + (\omega y)^2)^2}, \quad G_\omega(y) = -\frac{1}{16(1 + (\omega y)^2)}.$$

On pose $\omega_0 = 1000\pi$, $F = F_{\omega_0}$ et

$$z_n = \ln \left(1 + \frac{n}{100000} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La table étudiée comporte les valeurs $z_1, \dots, z_{10000}$. On s'intéresse à la moyenne

$$S = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} F(z_k)$$

et l'on désire montrer que cette valeur est petite. Posons

$$J = \frac{1}{10000} \int_{1/2}^{10000+1/2} F \left(\ln \left(1 + \frac{x}{100000} \right) \right) dx.$$

- 6) (a) Soit φ une fonction de classe C^2 sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose qu'il existe un réel

$$M > 0 \text{ tel que, pour tout } u \in [\frac{1}{2}, +\infty[, |\varphi''(u)| \leq M.$$

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $|h| \leq \frac{1}{2}$, on a

$$-\frac{M}{8} \leq \varphi(n+h) - \varphi(n) - h\varphi'(n) \leq \frac{M}{8}.$$

6) (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{M}{8} \leq \int_{n-1/2}^{n+1/2} \varphi(x) dx - \varphi(n) \leq \frac{M}{8}.$$

7) On pose $\varphi(x) = F(\ln(1 + \frac{x}{100000}))$.

7) (a) Calculer F'_ω et F''_ω , puis exprimer φ'' à l'aide de F' et F'' .

7) (b) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|F'_\omega(y)| \leq \omega$ et $|F''_\omega(y)| \leq \omega^2$. On pourra utiliser $2|t| \leq 1 + t^2$. En déduire que, pour tout $u \in [\frac{1}{2}, +\infty[$,

$$|\varphi''(u)| < \frac{\pi^2}{100^2} + \frac{\pi}{1000 \cdot 100^2}.$$

Dans la suite, on admettra que $\frac{\pi^2}{100^2} + \frac{\pi}{1000 \cdot 100^2} < 0,001$.

7) (c) Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, le réel $\varphi(k)$ en fonction de F et de z_k , puis montrer que

$$J - S = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} \left(\int_{k-1/2}^{k+1/2} \varphi(x) dx - \varphi(k) \right).$$

7) (d) En déduire que $|J - S| < 0,001$.

8) (a) Montrer, en effectuant le changement de variable $u = \ln(1 + \frac{x}{100000})$, que

$$J = 10 \int_{\ln(1+1/200000)}^{\ln(1+10000/100000+1/200000)} F(u)e^u du.$$

8) (b) Soient a, b, ω des réels tels que $0 < a < b$ et $\omega > 0$.

8) (b) i) Vérifier que $G'_\omega = \omega F_\omega$ et $|G_\omega| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\left| \int_{\ln a}^{\ln b} G_\omega(u)e^u du \right| \leq b - a.$$

8) (b) ii) À l'aide d'une intégration par parties et de l'inégalité précédente, montrer que

$$\left| \int_{\ln a}^{\ln b} F_\omega(u)e^u du \right| \leq \frac{2b}{\omega}.$$

8) (c) Dédurre de la question précédente que $|J| < \frac{1}{100}$.

8) (d) Conclure que $|S| < \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$.

III — Sur les nombres normaux

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note, sous réserve d'existence, $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X .

On rappelle les deux propriétés suivantes :

(i) Pour toute suite d'événements $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(C_k),$$

avec la convention que la somme vaut $+\infty$ si elle diverge.

- (ii) Si $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire si $C_k \supset C_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$, alors

$$P\left(\bigcap_{k \geq 0} C_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(C_k).$$

On rappelle aussi l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors, pour tout $\alpha > 0$,

$$P(Z > \alpha) \leq \frac{E(Z)}{\alpha}.$$

On modélise le tirage au sort d'un nombre réel entre zéro et un de la façon suivante : $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Elles représentent les décimales du nombre tiré, qui vaut

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{10^k}.$$

Pour tout $k \geq 1$, on définit une variable aléatoire Y_k à valeurs zéro ou un par $Y_k = 1$ si $X_k = 1$, et $Y_k = 0$ sinon.

- 9) (a) Montrer que les variables Y_k sont indépendantes et de même loi, que l'on précisera.
- 9) (b) Déterminer $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$.

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Ainsi $\frac{S_n}{n}$ représente la fréquence des chiffres un dans la suite des décimales du nombre tiré.

9) (c) Calculer $V(\frac{S_n}{n})$ en fonction de n .

9) (d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2}.$$

9) (e) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

On va améliorer ce résultat en montrant qu'avec probabilité un la fréquence des chiffres un dans les décimales vaut $\frac{1}{10}$.

10) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements.

10) (a) On pose $A = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{k=N}^{+\infty} A_k$. Montrer que A est l'ensemble des ω appartenant à une infinité d'événements A_k .

10) (b) On pose, pour tout $N \geq 1$, $B_N = \bigcup_{k=N}^{+\infty} A_k$. Montrer que, pour tout $N \geq 1$, $B_N \supset B_{N+1}$.

10) (c) En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(B_N) = P(A)$.

10) (d) On suppose que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) < +\infty.$$

10) (d) i) Que vaut

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=N}^{+\infty} P(A_k)$$

?

10) (d) ii) Conclure que $P(A) = 0$.

11) On pose, pour tout $k \geq 1$, $Y'_k = Y_k - \frac{1}{10}$.

11) (a) Montrer que

$$\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y'_k.$$

11) (b) Montrer que les variables Y'_k sont indépendantes, d'espérance nulle et telles que $|Y'_k| \leq 1$.

11) (c) Montrer que

$$E \left(\left(\sum_{k=1}^n Y'_k \right)^4 \right) \leq n + 3n(n-1).$$

On pourra développer le produit de quatre sommes et distinguer les termes comportant un indice qui apparaît une seule fois, ceux dont les quatre indices sont égaux et ceux dont les indices apparaissent deux fois chacun.

11) (d) En déduire que

$$E \left(\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10} \right)^4 \right) \leq \frac{3}{n^2}.$$

11) (e) On pose, pour $k \geq 1$,

$$A_k = \left(\left(\frac{S_k}{k} - \frac{1}{10} \right)^4 > \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

Montrer que $P(A_k) \leq \frac{3}{k^{3/2}}$.

11) (f) En déduire que

$$\sum_{k \geq 1} P(A_k)$$

est une série convergente.

11) (g) On considère l'événement

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \left(\frac{S_k(\omega)}{k} - \frac{1}{10} \right)^4 > \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ pour une infinité de } k \right\}.$$

Montrer que $P(A) = 0$.

11) (h) En déduire qu'avec probabilité un, on peut trouver N tel que, pour tout $k \geq N$,

$$\left| \frac{S_k}{k} - \frac{1}{10} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[k]{k}}.$$

11) (i) Conclure qu'avec probabilité un, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{S_k}{k} = \frac{1}{10}$.