



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2014

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

I — Autour de la loi de Benford

- 1) (a) Il s'agit de séparer la partie entière et la partie fractionnaire du logarithme. Par définition, $\ln x = \{\ln x\} + [\ln x]$. Comme $x > 0$, les propriétés rappelées donnent

$$x = 10^{\ln x} = 10^{\{\ln x\} + [\ln x]} = 10^{\{\ln x\}} 10^{[\ln x]}.$$

La décomposition demandée est donc valable pour tout $x > 0$.

- 1) (b) Méthode 1 — Prendre le logarithme

On a $0 \leq \{\ln x\} < 1$, donc $1 \leq 10^{\{\ln x\}} < 10$. Le couple de l'énoncé appartient ainsi à $[1, 10[\times \mathbb{Z}$ et fournit la décomposition, d'après la question précédente.

Supposons maintenant $x = \alpha 10^n$ avec $1 \leq \alpha < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\ln x = \ln \alpha + n$ et $0 \leq \ln \alpha < 1$. Par conséquent, $[\ln x] = n$, puis $\alpha = x 10^{-n} = 10^{\{\ln x\}}$. L'existence et l'unicité sont établies.

Méthode 2 — Comparer deux décompositions

L'existence est celle déjà démontrée. Si $x = \alpha 10^n = \beta 10^m$ avec $\alpha, \beta \in [1, 10[$, alors $10^{n-m} = \beta/\alpha$. Or $1/10 < \beta/\alpha < 10$. La seule puissance entière de dix strictement comprise entre $1/10$ et 10 est $10^0 = 1$. Ainsi $n = m$, puis $\alpha = \beta$.

La première méthode identifie directement l'exposant grâce à la partie entière ; la seconde utilise seulement la séparation des puissances de dix et permet de comparer deux écritures scientifiques.

- 1) (c) Comme $1 \leq 10^{\{\ln x\}} < 10$, sa partie entière est un entier compris entre un et neuf. Ainsi $\gamma \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

2) Chaque nombre $1 + 1/k$ est strictement supérieur à un ; donc $p_k > 0$. De plus,

$$p_k = \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

La somme est télescopique :

$$\sum_{k=1}^9 p_k = \ln 10 - \ln 1 = 1.$$

Les coefficients p_k définissent bien une loi de probabilité sur les neuf chiffres non nuls.

3) (a) Pour tout réel v , $[v] = k$ équivaut à $k \leq v < k+1$. En prenant $v = 10^Y$, on obtient exactement l'équivalence demandée, pour chaque réalisation de Y .

3) (b) On a $\Gamma = [10^Y]$. La fonction logarithme décimal étant strictement croissante,

$$(\Gamma = k) = (\ln k \leq Y < \ln(k+1)).$$

Pour $k \in \{1, \dots, 9\}$, ces bornes appartiennent à $[0, 1]$. Comme Y est uniforme sur $[0, 1[$, la probabilité d'un tel intervalle est sa longueur :

$$P(\Gamma = k) = \ln(k+1) - \ln k = \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = p_k.$$

Les valeurs aux bornes ne modifient pas cette probabilité, puisque la loi uniforme n'a pas d'atome. La variable Γ suit donc la loi de Benford.

4) (a) i) Pour $n \in \mathbb{Z}$, l'encadrement $[y] \leq y < [y] + 1$ donne $[y] - n \leq y - n < [y] - n + 1$. Ainsi $[y - n] = [y] - n$, puis

$$\{y - n\} = y - n - ([y] - n) = y - [y] = \{y\}.$$

- 4) (a) ii) L'égalité précédente est valable pour toute valeur réelle de Y . Les variables $\{Y\}$ et $\{Y - n\}$ sont donc égales, et a fortiori de même loi.

- 4) (a) iii) Posons $c = [a_0] \in \mathbb{Z}$ et $\tilde{Y} = Y - c$. Sa fonction de répartition est

$$P(\tilde{Y} \leq t) = P(Y \leq t + c).$$

Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, la dérivation de cette fonction donne une densité continue

$$\tilde{g}(t) = g(t + c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On peut également contrôler directement sa positivité et sa normalisation : le changement de variable affine $u = t + c$, d'abord sur un segment puis par passage aux limites aux deux extrémités, donne $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(u) du = 1$.

- 4) (a) iv) Comme g atteint son unique maximum en a_0 , la fonction $t \mapsto g(t + c)$ atteint son unique maximum en $\tilde{a}_0 = a_0 - c = \{a_0\}$. On a bien $\tilde{a}_0 \in [0, 1[$, et ce maximum vaut toujours M .
- 4) (a) v) La translation conserve la continuité et la valeur du maximum. Si $t \leq \tilde{a}_0$, alors $t + c \leq a_0$; la croissance de g sur $] - \infty, a_0]$ entraîne donc celle de $\tilde{g}$ sur $] - \infty, \tilde{a}_0]$. De même, $\tilde{g}$ est décroissante sur $[\tilde{a}_0, +\infty[$.

Les deux hypothèses sont conservées. En outre, $\{Y\}$ et $\{\tilde{Y}\}$ ont la même loi par la question ii). Il est donc légitime, pour étudier cette loi, de se ramener au cas $a_0 \in [0, 1[$.

- 4) (b) i) Le changement de variable affine $t = xu$, avec $x > 0$, donne

$$\int_0^x \varphi(t) dt = x \int_0^1 \varphi(xu) du.$$

Pour $u \in [0, 1]$, on a $0 \leq xu \leq u \leq 1$. La croissance de φ implique donc $\varphi(xu) \leq \varphi(u)$. Par positivité de l'intégrale et multiplication par $x > 0$,

$$\int_0^x \varphi(t) dt \leq x \int_0^1 \varphi(u) du.$$

4) (b) ii) Fixons $n \leq -1$. L'intervalle $[n, n+1]$ est contenu dans $] -\infty, 0]$, donc dans $] -\infty, a_0]$. Ainsi $\varphi(u) = g(n+u)$ est positive, continue et croissante sur $[0, 1]$.

La question précédente appliquée à cette fonction donne

$$\int_0^x g(n+u) du \leq x \int_0^1 g(n+u) du.$$

Après la translation $t = n+u$ et division par $x > 0$, on obtient

$$\frac{1}{x} \int_{I_{n,x}} g(t) dt \leq \int_n^{n+1} g(t) dt.$$

Les bornes ouvertes ou fermées ne modifient pas une intégrale de fonction continue.

Résultat admis dans l'énoncé : pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{x} \int_{I_{n,x}} g(t) dt \leq \int_{n-1+x}^{n+x} g(t) dt.$$

Cette seconde comparaison sera utilisée pour contrôler la partie droite de la somme.

- 4) (b) iii) Pour $N \geq 1$, l'addition des inégalités de ii) pour $n = -N, \dots, -1$ donne, par Chasles,

$$0 \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^N \int_{I_{-n,x}} g(t) dt \leq \int_{-N}^0 g(t) dt \leq 1.$$

La suite des sommes partielles de gauche est croissante et majorée. Elle converge ; l'intégrale de droite tend vers l'intégrale généralisée, qui existe puisque g est une densité. On en déduit

$$\frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \int_{I_{-n,x}} g(t) dt \leq \int_{-\infty}^0 g(t) dt.$$

De même, en additionnant l'inégalité admise pour $n = 2, \dots, N$,

$$0 \leq \frac{1}{x} \sum_{n=2}^N \int_{I_{n,x}} g(t) dt \leq \int_{1+x}^{N+x} g(t) dt \leq 1.$$

Le passage à la limite des sommes partielles positives et de l'intégrale généralisée donne

$$\frac{1}{x} \sum_{n \geq 2} \int_{I_{n,x}} g(t) dt \leq \int_{1+x}^{+\infty} g(t) dt.$$

On n'a échangé ici aucune limite avec une intégrale : on a sommé un nombre fini d'inégalités avant de passer à la limite.

- 4) (b) iv) La borne globale $0 \leq g \leq M$ vaut en tout point. Les deux intervalles considérés ont longueur x . On obtient donc

$$0 \leq \int_{I_{0,x}} g(u) du \leq xM, \quad 0 \leq \int_{I_{1,x}} g(u) du \leq xM.$$

- 4) (b) v) Les sommes de termes positifs sont convergentes d'après iii) et iv). En isolant les indices zéro et un, on obtient

$$\frac{1}{x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{I_{n,x}} g(u) du \leq \int_{-\infty}^0 g(u) du + 2M + \int_{1+x}^{+\infty} g(u) du.$$

Les deux intégrales portent sur des intervalles disjoints; leur somme est au plus

$$\int_{\mathbb{R}} g = 1. \text{ Ainsi}$$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{I_{n,x}} g(u) du \leq 1 + 2M.$$

Le partage des indices entre les entiers strictement négatifs et les entiers positifs ou nuls donne aussi l'égalité de décomposition demandée.

Résultat admis dans l'énoncé :

$$\frac{1}{x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{I_{n,x}} g(u) du \geq 1 - 2M.$$

Ce minorant fournit l'autre côté de l'encadrement nécessaire à vii). Il reste valable lorsque $1 - 2M$ est négatif.

- 4) (b) vi) Pour toute réalisation y de Y , on a $0 \leq \{y\} < 1$. Si $\{y\} < x$ et $n = [y]$, alors $n \leq y < n + x$, donc $y \in I_{n,x}$.

Réciproquement, si $y \in I_{n,x}$ pour un entier n , alors $n \leq y < n + x < n + 1$, puisque $x < 1$. Ainsi $[y] = n$ et $\{y\} = y - n < x$.

On a donc exactement

$$(\{Y\} < x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (Y \in I_{n,x}).$$

- 4) (b) vii) Les intervalles $I_{n,x}$ sont deux à deux disjoints, car chacun est contenu dans $[n, n+1[$. Par additivité dénombrable des probabilités et par la définition d'une densité,

$$P(\{Y\} < x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(Y \in I_{n,x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{I_{n,x}} g(u) du.$$

Les deux bornes de v), multipliées par $x > 0$, donnent

$$x(1 - 2M) \leq P(\{Y\} < x) \leq x(1 + 2M).$$

Ainsi $|P(\{Y\} < x) - x| \leq 2Mx \leq 2M$. L'encadrement demandé est établi.

- 5) (a) Comme Z_n suit une loi exponentielle de paramètre $1/n$, sa fonction de répartition vaut zéro sur $] -\infty, 0[$ et $1 - e^{-t/n}$ pour $t \geq 0$.

La variable $Y_n = \sqrt{Z_n}$ est positive. Pour $y \geq 0$,

$$P(Y_n \leq y) = P(Z_n \leq y^2) = 1 - e^{-y^2/n}.$$

Pour $y < 0$, cette probabilité vaut zéro. La fonction de répartition obtenue est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable de part et d'autre de zéro. Une densité est

$$g_n(y) = \begin{cases} \frac{2y}{n} e^{-y^2/n} & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

La limite à droite en zéro est zéro; cette densité est donc continue sur tout $\mathbb{R}$. Sa

positivité et sa normalisation découlent aussi de $\int_0^B \frac{2y}{n} e^{-y^2/n} dy = 1 - e^{-B^2/n} \rightarrow 1$.

5) (b) Pour $y > 0$, la dérivation donne

$$g'_n(y) = \frac{2}{n} e^{-y^2/n} \left(1 - \frac{2y^2}{n} \right).$$

Le facteur $\frac{2}{n} e^{-y^2/n}$ est strictement positif. La densité est donc strictement croissante sur $[0, \sqrt{n/2}]$, puis strictement décroissante sur $[\sqrt{n/2}, +\infty[$. Son maximum, atteint en un seul point, vaut

$$M_n = g_n(\sqrt{n/2}) = \sqrt{\frac{2}{n}} e^{-1/2}.$$

Sur $] -\infty, 0]$, elle est constante égale à zéro ; elle est par conséquent croissante au sens large sur $] -\infty, \sqrt{n/2}]$. Les hypothèses de la question 4 sont toutes satisfaites.

5) (c) On applique 4) (b) vii) à la densité continue g_n , qui possède le maximum unique et les variations vérifiés en b). Il vient, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$|P(\{Y_n\} < x) - x| \leq 2M_n = 2\sqrt{\frac{2}{n}} e^{-1/2}.$$

La réduction par translation de 4) (a) justifie l'application même si $\sqrt{n/2}$ n'appartient pas à $[0, 1[$.

5) (d) Posons $U_n = \{Y_n\}$. Pour $x \in [0, 1[$, l'événement $(U_n = x)$ est contenu dans la réunion dénombrable des événements $(Y_n = x + m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Chacun a probabilité nulle puisque Y_n est à densité. Ainsi $P(U_n = x) = 0$.

Pour $0 < x < 1$, on a donc $P(U_n \leq x) = P(U_n < x)$. Par c), cette probabilité tend vers x . Pour $x < 0$, la fonction de répartition de U_n vaut zéro ; en zéro elle vaut également zéro par l'absence d'atome. Pour $x \geq 1$, elle vaut un puisque $0 \leq U_n < 1$.

Les fonctions de répartition convergent donc en tout réel vers

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x & 0 < x < 1, \\ 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

qui est continue et correspond à la loi uniforme sur $[0, 1[$. Par la définition de la convergence en loi, U_n converge en loi vers cette loi uniforme.

II — Répartition des valeurs dans une table numérique

Le choix de la fonction-test est adapté au programme actuel. Dans cette partie, on utilise les fonctions rationnelles définies dans le sujet. Le but conservé est de majorer une moyenne tabulée par comparaison avec une intégrale.

6) (a) Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis, puis intégration

La fonction φ' est de classe C^1 . Sur le segment joignant n à $n + h$, contenu dans $[\frac{1}{2}, +\infty[$ puisque $n \geq 1$ et $|h| \leq \frac{1}{2}$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$|\varphi'(n+t) - \varphi'(n)| \leq M|t|$$

pour tout t entre zéro et h . Le théorème fondamental de l'intégration implique

$$\varphi(n+h) - \varphi(n) - h\varphi'(n) = \int_0^h (\varphi'(n+t) - \varphi'(n)) dt.$$

Si $h \geq 0$, la valeur absolue est majorée par $M \int_0^h t dt = Mh^2/2$. Si $h < 0$, on inverse les bornes et on obtient la majoration $M \int_h^0 |t| dt = Mh^2/2$. Dans les deux cas,

$$|\varphi(n+h) - \varphi(n) - h\varphi'(n)| \leq \frac{Mh^2}{2} \leq \frac{M}{8}.$$

On en déduit l'encadrement demandé, sans formule de Taylor avec reste.

Méthode 2 — Encadrer par deux fonctions convexes

Sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, les fonctions $u \mapsto \varphi(u) + Mu^2/2$ et $u \mapsto -\varphi(u) + Mu^2/2$ ont des dérivées secondes positives ou nulles; elles sont donc convexes. Une fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Appliquée à la première fonction en n , cette propriété donne

$$\varphi(n+h) + \frac{M}{2}(n+h)^2 \geq \varphi(n) + \frac{M}{2}n^2 + h(\varphi'(n) + Mn),$$

d'où $\varphi(n+h) - \varphi(n) - h\varphi'(n) \geq -Mh^2/2$. La seconde fonction fournit de même la majoration par $Mh^2/2$. Comme $h^2 \leq 1/4$, on retrouve les bornes $-M/8$ et $M/8$.

La première méthode est adaptée au contrôle d'une erreur par une borne de dérivée; la seconde interprète le même encadrement à l'aide de deux paraboles tangentes.

- 6) (b) On écrit $x = n + h$, avec $h \in [-1/2, 1/2]$. L'intégration de l'encadrement de a) sur ce segment de longueur un donne

$$-\frac{M}{8} \leq \int_{-1/2}^{1/2} (\varphi(n+h) - \varphi(n) - h\varphi'(n)) dh \leq \frac{M}{8}.$$

Or l'intégrale de h sur cet intervalle symétrique est nulle, et celle de la constante $\varphi(n)$ vaut $\varphi(n)$. On en déduit

$$-\frac{M}{8} \leq \int_{n-1/2}^{n+1/2} \varphi(x) dx - \varphi(n) \leq \frac{M}{8}.$$

7) (a) Question adaptée au programme actuel : la fonction-test est rationnelle.

Posons $t = \omega y$. Les dénominateurs $1 + t^2$ sont strictement positifs ; les fonctions considérées sont donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par dérivation du quotient,

$$F'_\omega(y) = \frac{\omega}{8} \left(\frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)^3} \right) = \frac{\omega(1-3t^2)}{8(1+t^2)^3}.$$

Une seconde dérivation donne

$$F''_\omega(y) = \frac{\omega^2}{8} \left(\frac{-6t}{(1+t^2)^3} - \frac{6t(1-3t^2)}{(1+t^2)^4} \right) = \frac{3\omega^2 t(t^2-1)}{2(1+t^2)^4}.$$

Posons $\ell(x) = \ln(1 + x/100000)$. Pour $x > -100000$,

$$\ell'(x) = \frac{1}{100000 + x}, \quad \ell''(x) = -\frac{1}{(100000 + x)^2}.$$

Comme $\varphi = F \circ \ell$, la dérivation composée donne

$$\varphi''(x) = \frac{F''(\ell(x)) - F'(\ell(x))}{(100000 + x)^2}.$$

7) (b) Question adaptée au programme actuel : les bornes de dérivées sont établies pour la nouvelle fonction.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|1 - 3t^2| \leq 1 + 3t^2 \leq 3(1 + t^2)$. Ainsi

$$|F'_\omega(y)| \leq \frac{3\omega}{8(1+t^2)^2} \leq \frac{3\omega}{8} \leq \omega.$$

De plus, $|t^2 - 1| \leq 1 + t^2$ et $2|t| \leq 1 + t^2$; donc

$$|F''_\omega(y)| \leq \frac{3\omega^2|t|}{2(1+t^2)^3} \leq \frac{3\omega^2}{4(1+t^2)^2} \leq \frac{3\omega^2}{4} \leq \omega^2.$$

En prenant $\omega = \omega_0 = 1000\pi$, la formule de a) implique, pour $u \geq \frac{1}{2}$,

$$|\varphi''(u)| \leq \frac{\omega_0^2 + \omega_0}{(100000 + u)^2} < \frac{(1000\pi)^2 + 1000\pi}{100000^2} = \frac{\pi^2}{100^2} + \frac{\pi}{1000 \cdot 100^2}.$$

On utilise ensuite la borne numérique admise dans le sujet, qui majore ce dernier nombre par 0,001.

7) (c) Pour chaque indice de la table, $z_k = \ln(1 + k/100000)$; ainsi $\varphi(k) = F(z_k)$. Par Chasles sur les segments successifs,

$$\int_{1/2}^{10000+1/2} \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^{10000} \int_{k-1/2}^{k+1/2} \varphi(x) dx.$$

En soustrayant

$$S = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} \varphi(k)$$

à l'expression de J , on obtient

$$J - S = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} \left(\int_{k-1/2}^{k+1/2} \varphi(x) dx - \varphi(k) \right).$$

- 7) (d) La fonction φ est de classe C^2 sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. D'après b), ses dérivées secondes sont majorées en valeur absolue par $M = 0,001$. Les hypothèses de 6) sont donc satisfaites.

Chaque différence de la somme de c) est en valeur absolue au plus $0,001/8$. Par l'inégalité triangulaire,

$$|J - S| \leq \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} \frac{0,001}{8} = \frac{0,001}{8} < 0,001.$$

On obtient ainsi une estimation de l'erreur entre la moyenne tabulée et l'intégrale par un argument sur des sommes finies.

- 8) (a) Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine est indiqué dans le sujet, et la fonction rationnelle remplace la fonction-test d'origine.

La fonction $x \mapsto u = \ln(1 + x/100000)$ est de classe C^1 et strictement croissante sur le segment d'intégration. Son inverse est $x = 100000(e^u - 1)$, d'où $dx = 100000e^u du$.

Les bornes sont $u_- = \ln(1 + 1/200000)$ et $u_+ = \ln(1 + 10000/100000 + 1/200000)$. Le changement de variable sur ce segment donne

$$J = \frac{100000}{10000} \int_{u_-}^{u_+} F(u)e^u du = 10 \int_{u_-}^{u_+} F(u)e^u du.$$

- 8) (b) i) Question adaptée au programme actuel : on contrôle une primitive rationnelle explicite.

La dérivation directe fournit

$$G'_\omega(u) = \frac{2\omega^2 u}{16(1 + (\omega u)^2)^2} = \omega F_\omega(u).$$

Comme $1 + (\omega u)^2 \geq 1$, $|G'_\omega(u)| \leq 1/16 \leq 1$. Avec $0 < a < b$, on a $\ln a < \ln b$. L'intégrande

est continu sur ce segment. L'inégalité triangulaire intégrale donne

$$\left| \int_{\ln a}^{\ln b} G_{\omega}(u) e^u du \right| \leq \int_{\ln a}^{\ln b} |G_{\omega}(u)| e^u du \leq \int_{\ln a}^{\ln b} e^u du = b - a.$$

8) (b) ii) Question adaptée au programme actuel : l'intégration par parties porte sur la primitive rationnelle précédente.

Puisque $\omega > 0$, G_{ω}/ω est une primitive de F_{ω} . Les fonctions sont de classe C^1 sur le segment considéré, ce qui autorise l'intégration par parties :

$$\int_{\ln a}^{\ln b} F_{\omega}(u) e^u du = \frac{1}{\omega} \left([G_{\omega}(u) e^u]_{\ln a}^{\ln b} - \int_{\ln a}^{\ln b} G_{\omega}(u) e^u du \right).$$

La contribution des bornes a une valeur absolue au plus $b + a$, puisque $|G_{\omega}| \leq 1$. La question i) majore la seconde contribution par $b - a$. Ainsi

$$\left| \int_{\ln a}^{\ln b} F_{\omega}(u) e^u du \right| \leq \frac{a + b + (b - a)}{\omega} = \frac{2b}{\omega}.$$

8) (c) Question adaptée au programme actuel : la majoration concerne la moyenne intégrale associée à la nouvelle fonction.

Dans a), on prend $a = 1 + 1/200000$, $b = 1 + 10000/100000 + 1/200000$ et $\omega = 1000\pi$. Ces paramètres vérifient $0 < a < b$. La question b) ii) donne

$$|J| \leq 10 \frac{2b}{1000\pi} = \frac{b}{50\pi}.$$

Or $b = 1,100005 < 3/2$ et $\pi > 3$. Par conséquent,

$$|J| < \frac{3/2}{50 \times 3} = \frac{1}{100}.$$

- 8) (d) Question adaptée au programme actuel : la conclusion est conservée pour la nouvelle fonction-test.

Par l'inégalité triangulaire et les résultats 7) (d) et 8) (c),

$$|S| \leq |S - J| + |J| < \frac{1}{1000} + \frac{1}{100}.$$

La petite valeur de cette moyenne tabulée est ainsi établie. La fonction rationnelle utilisée ici n'étant pas périodique, ce résultat ne constitue pas une étude d'équirépartition par une fonction périodique.

III — Sur les nombres normaux

- 9) (a) Pour tout k , Y_k est la fonction de X_k qui vaut un si $X_k = 1$, et zéro sinon. Des fonctions appliquées séparément à des variables indépendantes restent indépendantes, par le lemme des coalitions.

La loi uniforme de X_k sur les dix chiffres donne $P(Y_k = 1) = P(X_k = 1) = 1/10$ et $P(Y_k = 0) = 9/10$. Les Y_k sont donc indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/10$.

- 9) (b) Les variables de Bernoulli sont bornées, donc admettent tous leurs moments. Les formules de leur espérance et de leur variance donnent

$$E(Y_k) = \frac{1}{10}, \quad V(Y_k) = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{100}.$$

- 9) (c) Méthode 1 — Additivité de la variance

Les variables Y_k sont indépendantes et admettent une variance finie. Par conséquent,

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(Y_k) = \frac{9n}{100}.$$

La variance d'un multiple d'une variable est multipliée par le carré du coefficient. Il vient donc

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{9}{100n}.$$

Méthode 2 — Reconnaître une loi binomiale

La variable S_n compte les succès de n expériences indépendantes de même probabilité de succès $1/10$. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres n et $1/10$. La variance d'une telle loi vaut $n(1/10)(9/10) = 9n/100$. En divisant la variable par n , on divise sa variance par n^2 , d'où encore $9/(100n)$.

La première méthode s'applique à des sommes de variables indépendantes de lois différentes ; la seconde identifie en plus la loi exacte du nombre de succès.

- 9) (d) La linéarité de l'espérance donne $E(S_n/n) = 1/10$. La variable S_n/n admet un moment d'ordre deux, puisqu'elle est bornée entre zéro et un. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{9}{100n\varepsilon^2}.$$

La version avec une inégalité stricte dans l'événement découle de celle avec une inégalité large par inclusion.

- 9) (e) Pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$0 \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{9}{100n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Le théorème d'encadrement donne donc la limite annoncée. Cette conclusion contrôle la

probabilité d'un écart à chaque rang ; les questions suivantes établiront une propriété simultanée à tous les rangs assez grands, en dehors d'un événement de probabilité nulle.

10) (a) Par les définitions de l'intersection et de la réunion,

$$\omega \in A \iff \forall N \geq 1, \exists k \geq N, \omega \in A_k.$$

Si ω n'appartenait qu'à un nombre fini d'événements A_k , on pourrait choisir N strictement supérieur à tous leurs indices, et la propriété de droite serait fausse. Réciproquement, un ensemble infini d'indices entiers positifs n'est pas borné : il contient donc un indice $k \geq N$ pour chaque N .

Ainsi A est exactement l'ensemble des réalisations qui appartiennent à une infinité d'événements A_k .

10) (b) Tout indice $k \geq N + 1$ vérifie aussi $k \geq N$. Chaque événement de la réunion définissant B_{N+1} figure donc dans la réunion définissant B_N . Ainsi $B_{N+1} \subset B_N$ pour tout $N \geq 1$.

10) (c) La suite $(B_N)_{N \geq 1}$ est décroissante et son intersection est A par définition. La propriété de continuité décroissante des probabilités, rappelée dans le sujet, donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(B_N) = P\left(\bigcap_{N \geq 1} B_N\right) = P(A).$$

10) (d) i) Posons

$$L = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k),$$

qui est fini par hypothèse. Pour $N \geq 1$,

$$\sum_{k=N}^{+\infty} P(A_k) = L - \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k).$$

La somme partielle tend vers L ; la somme de la queue de la série tend donc vers zéro.

10) (d) ii) L'inégalité pour la probabilité d'une réunion, rappelée dans le sujet, implique

$$0 \leq P(B_N) \leq \sum_{k=N}^{+\infty} P(A_k).$$

La borne de droite tend vers zéro d'après i). Ainsi $P(B_N) \rightarrow 0$. Par c), la même limite vaut $P(A)$: on conclut que $P(A) = 0$.

Ce résultat a été établi pour cette suite d'événements à partir des deux propriétés explicitement rappelées ; aucun théorème supplémentaire de convergence de variables aléatoires n'est nécessaire.

11) (a) Par définition de Y'_k et de S_n ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y'_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(Y_k - \frac{1}{10} \right) = \frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}.$$

11) (b) Les Y'_k sont des fonctions appliquées séparément aux variables indépendantes Y_k . Elles sont donc indépendantes. Comme $E(Y_k) = 1/10$, leur espérance est nulle : $E(Y'_k) = 0$.

Enfin Y'_k vaut $9/10$ ou $-1/10$. On a donc $|Y'_k| \leq 9/10 \leq 1$. Toutes les puissances et tous les produits finis employés dans la suite sont bornés ; leurs espérances existent.

11) (c) Question adaptée au programme actuel : l'énoncé comporte une indication pour guider le comptage des termes du moment d'ordre quatre.

Méthode 1 — Développer et classer les indices

Posons

$$T_n = \sum_{k=1}^n Y'_k.$$

En développant le produit de quatre sommes, on écrit

$$T_n^4 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n Y'_i Y'_j Y'_k Y'_\ell.$$

Si un indice apparaît une seule fois dans un terme, la variable portant cet indice est indépendante du produit des autres, par indépendance et coalitions. Comme elle est centrée, l'espérance du terme est nulle. Cela annule les configurations avec quatre indices différents, trois indices différents, ou deux indices d'apparitions respectives trois et un.

Il reste les termes dont les quatre indices sont égaux, et les termes portant deux indices distincts, chacun présent deux fois. Pour une paire $i < j$, les positions des deux occurrences de i peuvent être choisies de six façons : les couples de positions sont $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ et $(3, 4)$. Par linéarité et indépendance,

$$E(T_n^4) = \sum_{i=1}^n E((Y'_i)^4) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E((Y'_i)^2) E((Y'_j)^2).$$

Comme $|Y'_i| \leq 1$, chaque espérance de carré ou de quatrième puissance est comprise entre zéro et un. Il y a n termes dans la première somme. Le nombre de paires $i < j$ vaut $1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$. Ainsi

$$E(T_n^4) \leq n + 6 \frac{n(n-1)}{2} = n + 3n(n-1).$$

Méthode 2 — Ajouter une variable et raisonner par récurrence

Pour $n \geq 2$, $T_n = T_{n-1} + Y'_n$. Le binôme, puis l'indépendance de T_{n-1} et Y'_n , donnent

$$\begin{aligned} E(T_n^4) &= E(T_{n-1}^4) + 4E(T_{n-1}^3)E(Y'_n) + 6E(T_{n-1}^2)E((Y'_n)^2) + 4E(T_{n-1})E((Y'_n)^3) \\ &\quad + E((Y'_n)^4). \end{aligned}$$

Les espérances existent puisque les variables sont bornées. On a $E(Y'_n) = E(T_{n-1}) = 0$, donc les deux termes affectés du coefficient quatre sont nuls. De plus,

$$E(T_{n-1}^2) = V(T_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} V(Y'_k) \leq n-1,$$

car $V(Y'_k) = E((Y'_k)^2) \leq 1$. Par conséquent,

$$E(T_n^4) \leq E(T_{n-1}^4) + 6(n-1) + 1.$$

Le rang initial vérifie $E(T_1^4) \leq 1$. En sommant les accroissements pour les rangs de deux à n , on obtient

$$E(T_n^4) \leq 1 + \sum_{j=2}^n (6(j-1) + 1) = n + 6 \sum_{r=1}^{n-1} r = n + 3n(n-1).$$

La première méthode montre quels produits survivent grâce au centrage ; la seconde évite le développement à quatre indices et permet de contrôler le moment au fur et à mesure de l'addition des variables.

- 11)** (d) D'après a), la variable considérée est T_n/n . Par homogénéité de la puissance et linéarité de l'espérance,

$$E \left(\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10} \right)^4 \right) = \frac{E(T_n^4)}{n^4} \leq \frac{n + 3n(n-1)}{n^4} = \frac{3n^2 - 2n}{n^4} \leq \frac{3}{n^2}.$$

La division est légitime puisque $n \geq 1$.

- 11) (e) Posons $W_k = (S_k/k - 1/10)^4$. Cette variable est positive et bornée ; elle admet donc une espérance. L'inégalité de Markov, rappelée dans le sujet, est applicable au seuil $1/\sqrt{k} > 0$. Avec d), elle donne

$$P(A_k) = P \left(W_k > \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \leq \sqrt{k} E(W_k) \leq \sqrt{k} \frac{3}{k^2} = \frac{3}{k^{3/2}}.$$

- 11) (f) La série de Riemann

$$\sum_{k \geq 1} k^{-3/2}$$

converge, puisque son exposant $3/2$ est strictement supérieur à un. Comme $0 \leq P(A_k) \leq 3k^{-3/2}$, la comparaison des séries à termes positifs montre que

$$\sum_{k \geq 1} P(A_k)$$

converge.

- 11) (g) L'événement A est exactement celui d'appartenir à une infinité d'événements A_k , comme en 10) (a). D'après f), la somme de leurs probabilités est finie. Les conclusions de 10) (d) s'appliquent donc à cette suite et donnent $P(A) = 0$.

- 11) (h) Sur l'événement complémentaire $\Omega \setminus A$, de probabilité un, les événements A_k ne se réalisent qu'un nombre fini de fois. Pour chaque ω de ce complémentaire, il existe donc un entier $N = N(\omega)$ tel que, pour tout $k \geq N$,

$$\left(\frac{S_k(\omega)}{k} - \frac{1}{10} \right)^4 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La fonction racine quatrième est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit

$$\left| \frac{S_k(\omega)}{k} - \frac{1}{10} \right| \leq (k^{-1/2})^{1/4} = k^{-1/8} = \frac{1}{\sqrt[8]{k}}.$$

L'entier N peut dépendre du nombre tiré ; la propriété annoncée vaut néanmoins sur un même événement de probabilité un.

- 11)** (i) Pour chaque $\omega \in \Omega \setminus A$, la majoration de h) est valable pour tous les rangs assez grands. Or $k^{-1/8} \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement appliqué à cette suite numérique donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{S_k(\omega)}{k} = \frac{1}{10}.$$

Comme $P(\Omega \setminus A) = 1$, la fréquence des chiffres un converge vers $1/10$ avec probabilité un. Le même raisonnement pourrait être appliqué à un autre chiffre fixé ; le problème a établi ici la propriété demandée pour le chiffre un.

Relevé des adaptations

Partie II, préambule et questions 7) (a)–(b), 8) (a)–(d) : la fonction-test d'origine, trigonométrique et périodique, est remplacée par $F_\omega(y) = \omega y / [8(1 + (\omega y)^2)^2]$, accompagnée de la primitive contrôlée $G_\omega(y) = -1/[16(1 + (\omega y)^2)]$. Les calculs de dérivées et les intégrations par parties sont reformulés en conséquence. Le même schéma d'estimation et les mêmes bornes finales sont conservés. La périodicité et l'interprétation d'équirépartition périodique ne sont pas conservées ; seul l'objectif de majoration de la moyenne de la table est retenu.

- 8) (a) : le changement de variable non affine $u = \ln(1 + x/100000)$ est indiqué explicitement dans le sujet, conformément au programme.
- 10) (b) : la quantification $N \geq 0$ figurant dans le PDF est rectifiée en $N \geq 1$, domaine sur lequel B_N est défini. Les autres questions conservent ce même domaine.
- 11) (c) : ajout d'une indication sur les occurrences des indices dans le développement du moment d'ordre quatre, afin de guider le comptage sans supposer un chapitre général de dénombrement.

Les résultats admis de 4) (b) ii) et v) et la borne numérique de 7) (b) sont déjà présents dans le sujet original et restent admis. L'inégalité de Markov et les deux propriétés des suites d'événements sont conservées avec leur énoncé, comme dans l'original.