



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2012

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

En psychologie, on s'intéresse à la façon dont un individu est amené à sélectionner une action quand un choix se présente entre différentes actions possibles. Ce choix peut être influencé par un grand nombre de facteurs impondérables, ce qui fait qu'il est légitime de le modéliser à l'aide de variables aléatoires. L'objet du problème est de présenter quelques éléments simples de la théorie des modèles de choix discrets. Dans le modèle binaire le plus simple, le choix se fait en fonction de la réaction à un stimulus. Dans une première partie, on étudie la modélisation élémentaire de la réponse à un stimulus. Dans une deuxième partie, on considère une modélisation de choix dépendant du hasard, dite modèle de Luce, et on en étudie les propriétés. Enfin, dans une troisième partie, on regarde le cas où les différents choix possibles engendrent des réactions aléatoires et on étudie des propriétés de la réaction optimale. Les trois parties sont indépendantes.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si elles existent, on note $E(T)$ et $V(T)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle T .

I — Modèles avec réponse discrète

Soit α un réel, positif ou négatif, représentant un niveau de stimulus. On considère une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{R}$, représentant la tolérance de l'individu au stimulus en question. On considère donc que l'individu réagit si $X \leq \alpha$ et ne réagit pas si $X > \alpha$. On considère la variable aléatoire Y indicatrice de la réaction définie par $Y = 1$ si $X \leq \alpha$ et $Y = 0$ si $X > \alpha$.

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

- 1) Déterminer la loi de Y , son espérance θ et sa variance.
- 2) On considère $n \geq 1$ individus dont on observe la réaction au stimulus. La tolérance de l'individu i est une variable aléatoire X_i dont on suppose qu'elle suit la même loi que X . En outre, les tolérances pour les différents individus sont supposées indépendantes.
 - 2)(a) Soit N la variable aléatoire égale au nombre d'individus réagissant au stimulus. Déterminer la loi de N , son espérance et sa variance.

2)(b) Construire à l'aide de N un estimateur sans biais de θ . On appelle ici estimateur sans biais de θ une variable aléatoire calculée à partir des observations, sans utiliser la valeur inconnue de θ , et dont l'espérance est égale à θ pour toute valeur admissible de ce paramètre.

3) Soient m un réel et σ un réel strictement positif. On modélise la tolérance comme la résultante d'un grand nombre de facteurs indépendants de petite taille de la façon suivante. On fixe une suite $(Z_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance 0 et de variance 1. Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose

$$X_{n,i} = \frac{m}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_i \quad (1 \leq i \leq n), \quad X^{(n)} = \sum_{i=1}^n X_{n,i}.$$

Pour un même n , les facteurs $X_{n,i}$ sont donc indépendants et de même loi, d'espérance m/n et de variance σ^2/n .

3)(a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de $X^{(n)}$.

3)(b) Montrer que, pour tout réel a ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X^{(n)} - m}{\sigma} \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2} du.$$

3)(c) Le résultat précédent justifie que, pour n grand, on puisse approcher la loi de $(X^{(n)} - m)/\sigma$ par la loi normale centrée réduite. Dans ce modèle approché, on considère une tolérance X de loi normale d'espérance m et de variance σ^2 . Trouver l'expression de θ en fonction de α , m et σ .

3)(d) Déterminer $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \theta$ et interpréter le résultat.

4) Plutôt que d'utiliser la loi normale, on préfère souvent une loi plus simple dont on étudie dans cette question quelques propriétés.

4)(a) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}.$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. On dit alors que cette variable aléatoire suit la loi logistique.

4)(b) On suppose que X suit une loi logistique. Déterminer θ .

On considère Z une variable aléatoire suivant la loi logistique.

4)(c) Déterminer une densité de probabilité de Z .

4)(d) Soit y un réel positif. Établir une relation entre $F(y)$ et $F(-y)$.

4)(e) Montrer que Z admet une espérance et la déterminer.

4)(f) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$.

II — Règles de décisions stochastiques : le modèle de Luce

On suppose maintenant que l'individu doit choisir une action dans un ensemble fini d'actions possibles A , contenant au moins deux éléments. On note $\mathcal{F} = \{S \subset A \mid |S| \geq 2\}$, où $|S|$ désigne le cardinal de l'ensemble S . Quand le nombre d'actions possibles est très grand, la procédure de choix se passe en deux temps : l'individu commence par sélectionner une partie S de $\mathcal{F}$ à laquelle il va restreindre son choix, puis choisit une action précise à l'intérieur de S .

Pour chaque élément S de $\mathcal{F}$, on définit une probabilité P_S sur S : pour un élément a de S , $P_S(\{a\})$ représente la probabilité que l'individu ayant sélectionné S choisisse l'action a . Pour simplifier la notation, on notera $P_S(a)$ pour $P_S(\{a\})$. En particulier,

$$P_A(S) = \sum_{a \in S} P_A(a)$$

est la probabilité que l'individu prenne dans S l'action qu'il choisit.

Pour a et b distincts dans A , on note $P(a, b) = P_{\{a, b\}}(a)$; il s'agit donc de la probabilité de préférer l'action a à l'action b dans le cas d'un choix à faire entre a et b .

On suppose que, pour tout S appartenant à $\mathcal{F}$ et pour tout a dans S , $P_S(a) \neq 0$.

On fait l'hypothèse suivante sur le modèle :

$$(*) \quad \text{pour tout couple } (S, T) \in \mathcal{F}^2 \text{ tel que } S \subset T, \text{ pour tout } a \in S, \quad P_T(a) = P_T(S)P_S(a).$$

5) Interpréter le sens de la condition (*) en termes de probabilités conditionnelles.

6)(a) Soit k un réel strictement positif. On pose, pour tout $a \in A$, $v(a) = kP_A(a)$. Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{F}$ et pour tout $a \in S$,

$$P_S(a) = \frac{v(a)}{\sum_{b \in S} v(b)}. \quad (1)$$

6)(b) Montrer que, si v et w sont deux fonctions réelles strictement positives sur A satisfaisant (1), il existe un réel μ strictement positif tel que $v = \mu w$. Une telle fonction s'appelle une utilité associée au système de probabilités $(P_S)_{S \in \mathcal{F}}$.

7) Réciproquement, soit v une fonction réelle strictement positive sur A . On pose, pour tout $S \in \mathcal{F}$ et tout $a \in S$,

$$Q_S(a) = \frac{v(a)}{\sum_{b \in S} v(b)}.$$

Montrer qu'on définit ainsi un système de probabilités vérifiant (*).

8)(a) Soit v une utilité associée au système de probabilités $(P_S)_{S \in \mathcal{F}}$. Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{F}$ et pour tout a et b dans S ,

$$v(a) \leq v(b) \iff P_S(a) \leq P_S(b).$$

La probabilité que a soit choisi augmente donc avec son utilité.

8)(b) Montrer qu'il existe une fonction ρ sur A telle que, pour tous a et b distincts dans A ,

$$P(a, b) = \frac{1}{1 + \exp(\rho(b) - \rho(a))}.$$

8)(c) Soit X une variable aléatoire suivant la loi logistique de fonction de répartition F définie par

$$F(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}.$$

Soient a et b distincts dans A . Trouver en fonction de ρ un réel $\alpha_{a,b}$ tel que

$$P(a, b) = P(X \leq \alpha_{a,b}).$$

9)(a) Montrer que, pour tout couple $(S, T) \in \mathcal{F}^2$ tel que $S \subset T$ et pour tous a et b dans S , on a

$$\frac{P_S(a)}{P_S(b)} = \frac{P_T(a)}{P_T(b)}.$$

Le rapport des probabilités de choix respectives de a et b est donc indépendant de la sélection de l'ensemble d'actions contenant a et b .

9)(b) On examine ici un cas concret. On suppose que l'individu devant se rendre de son domicile à son travail ait le choix entre utiliser sa voiture, symbolisée par V , ou le bus, dont deux lignes sont possibles : le bus rouge, symbolisé par R , ou le bus bleu, symbolisé par B . On a donc l'ensemble d'actions $A = \{V, R, B\}$. On suppose l'individu indifférent au fait de choisir sa voiture ou un bus, et également indifférent à la couleur du bus.

On définit ainsi un système de probabilités comme précédemment avec

$P(V, R) = P(V, B) = 1/2$ et, de plus, $P_A(R) = P_A(B)$. Montrer que $P_A(V) = 1/3$. Ce résultat est-il satisfaisant ? Interpréter.

III — Utilités aléatoires

Dans cette partie, on aborde la question du choix sous un autre aspect. À chaque action i de l'ensemble d'actions $A = \{1, 2, \dots, n\}$ est associée une variable aléatoire U_i représentant l'utilité de l'action i . L'individu est alors amené à choisir l'action qui maximise ces utilités. On suppose que les variables U_i sont indépendantes et que la loi

de U_i est donnée par la fonction de répartition F_i . On s'intéresse dans cette partie à la valeur U de l'utilité maximale, c'est-à-dire à $U = \max(U_1, \dots, U_n)$.

10)(a) Déterminer la fonction de répartition G_n de U . Que vaut G_n dans le cas particulier où les U_i suivent la même loi de fonction de répartition F ?

On suppose désormais que les U_i ont même loi.

10)(b) Pour x réel donné, étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

10)(c) Montrer que les seules lois pour lesquelles on a $G_n = F$ pour tout $n \geq 1$ sont les lois de variables aléatoires constantes.

11) Pour obtenir un type de loi plus intéressant pour U , on va chercher des lois admettant une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction de répartition F vérifie que, pour tout $n \geq 1$, il existe $b_n \leq 0$ tel que, pour tout réel x ,

$$(F(x))^n = F(x + b_n).$$

On suppose qu'une telle loi existe et on cherche des conditions qu'elle vérifie. On reste dans le cadre des densités continues sauf éventuellement en un nombre fini de points et ayant des limites finies à gauche et à droite en tout point réel.

11)(a) Montrer que F est une fonction continue et strictement croissante telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. F définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

11)(b) Montrer que la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

11)(c) Soit (n, N) un couple d'entiers strictement positifs. On considère $U_1, \dots, U_{nN}$, nN variables aléatoires indépendantes de même loi F , et on pose, pour $1 \leq j \leq n$,

$$Y_j = \max(U_{(j-1)N+1}, \dots, U_{jN}).$$

Montrer que les variables Y_j sont indépendantes.

11)(d) Quelle est la fonction de répartition de Y_j ?

11)(e) En remarquant que $\max(Y_1, \dots, Y_n) = \max(U_1, \dots, U_{nN})$, montrer que, pour tout réel x ,

$$F(x)^{nN} = F(x + b_n + b_N) = F(x + b_{nN}).$$

Déduire que, pour tout couple (n, N) d'entiers strictement positifs, $b_{nN} = b_n + b_N$.

11)(f) Montrer que, pour tout entier n strictement positif et tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{nk} = kb_n$.

11)(g) Soient p et m deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe un unique $k_m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{k_m} \leq p^m < 2^{k_m+1}$ et que $\lim_{m \rightarrow +\infty} k_m/m = \ln p / \ln 2$.

11)(h) En déduire qu'il existe un réel γ tel que, pour tout entier p strictement positif, $b_p = \gamma \ln p$.

11)(i) Montrer que la fonction $F(x) = \exp(-e^{-x})$ satisfait aux conditions cherchées. La loi ainsi définie est dite loi de Gumbel.

12) Dans cette question, on étudie un certain nombre de propriétés de la loi de Gumbel.

Soit X une variable aléatoire de loi de Gumbel, c'est-à-dire de fonction de répartition F telle que $F(x) = \exp(-e^{-x})$.

12)(a) Déterminer une densité de probabilité de X .

12)(b) On pose $Z = e^{-X}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z .

12)(c) Soient x et y deux réels strictement positifs. Établir une relation entre $P_{[X \leq -\ln x]}(X \leq -\ln(x+y))$ et $P(X \leq -\ln y)$.

12)(d) On considère $(Y_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Soit L une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1, indépendante de la suite $(Y_i)_{i \geq 1}$. On considère la variable aléatoire $W = \max(Y_1, \dots, Y_L)$, telle que, pour tout $k \geq 1$ et tout $\omega \in [L = k]$, $W(\omega) = \max(Y_1(\omega), \dots, Y_k(\omega))$, et $W(\omega) = 0$ si $L(\omega) = 0$.

Montrer que, pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, $P(a \leq W \leq b) = P(a \leq X \leq b)$.
Que vaut $P(W = 0)$?