



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2012

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

I — Modèles avec réponse discrète

1) La variable Y prend les valeurs 0 et 1, avec

$$P(Y = 1) = P(X \leq \alpha) = F(\alpha), \quad P(Y = 0) = 1 - F(\alpha).$$

Elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\theta = F(\alpha)$. Étant bornée, elle possède une espérance et une variance, données par

$$E(Y) = \theta = F(\alpha), \quad V(Y) = \theta(1 - \theta) = F(\alpha)(1 - F(\alpha)).$$

Ces formules incluent les cas $\theta = 0$ et $\theta = 1$, où Y est constante presque sûrement et sa variance est nulle.

2)(a) Notons Y_i l'indicatrice de l'événement $[X_i \leq \alpha]$. Les tolérances X_i étant indépendantes et de même loi que X , les variables Y_i sont indépendantes, par le lemme des coalitions, et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre θ . Ainsi

$$N = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{B}(n, \theta).$$

En particulier, pour $0 < \theta < 1$ et $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}.$$

La variable N est bornée, donc ses moments existent. Les formules de la loi binomiale donnent

$$E(N) = n\theta, \quad V(N) = n\theta(1 - \theta).$$

Si $\theta = 0$, $N = 0$ presque sûrement ; si $\theta = 1$, $N = n$ presque sûrement. Les formules des moments restent valables.

2)(b) Question adaptée au programme actuel : la définition de « sans biais » est donnée dans le sujet.

La fréquence des réactions est une fonction des observations ne faisant pas intervenir le paramètre inconnu : on choisit

$$\hat{\theta}_n = \frac{N}{n}.$$

Comme $n \geq 1$ et N admet une espérance, la linéarité donne

$$E(\hat{\theta}_n) = \frac{E(N)}{n} = \theta.$$

Cet estimateur est donc sans biais, y compris aux valeurs limites du paramètre. Pour une observation $N = k$, l'estimation obtenue est le nombre k/n ; il faut distinguer ce nombre de la variable aléatoire $\hat{\theta}_n$.

3)(a) Question adaptée au programme actuel : la construction des facteurs à partir d'une même suite (Z_i) précise les hypothèses nécessaires à la question suivante.

Pour chaque $i \leq n$, les formules d'une transformation affine donnent

$$E(X_{n,i}) = \frac{m}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} E(Z_i) = \frac{m}{n}, \quad V(X_{n,i}) = \frac{\sigma^2}{n} V(Z_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Les variances sont finies. Par linéarité de l'espérance et, pour la variance, par indépendance des facteurs,

$$E(X^{(n)}) = n \frac{m}{n} = m, \quad V(X^{(n)}) = n \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2.$$

L'écart-type de $X^{(n)}$ est donc σ , car $\sigma > 0$.

3)(b) Question adaptée au programme actuel.

La construction du sujet permet l'identité exacte

$$X^{(n)} = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i, \quad \frac{X^{(n)} - m}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Le théorème limite central s'applique à la suite (Z_i) : les variables sont indépendantes et

de même loi, d'espérance 0 et de variance finie non nulle égale à 1. Il affirme que

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n Z_i$$

converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite.

La fonction de répartition de cette loi étant continue en tout réel a , la définition de la convergence en loi donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X^{(n)} - m}{\sigma} \leq a\right) = \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2} du.$$

Le seul fait que les facteurs d'une même ligne soient indépendants, de même loi et de moments m/n et σ^2/n , sans relation supplémentaire entre les lois quand n varie, ne permettrait pas cette application du théorème limite central. L'hypothèse ajoutée répare ce défaut de l'énoncé original.

3)(c) Question adaptée au programme actuel : le sujet distingue explicitement la convergence précédente du modèle normal approché.

Dans le modèle $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, la variable $(X - m)/\sigma$ suit la loi normale centrée réduite. Comme $\sigma > 0$,

$$\theta = P(X \leq \alpha) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{\alpha - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right).$$

Cette formule est exacte dans le modèle normal. Pour les tolérances $X^{(n)}$ de la question précédente, elle donne une approximation de la probabilité de réaction lorsque n est grand.

3)(d) Pour α et m fixés, $(\alpha - m)/\sigma$ tend vers 0 quand $\sigma \rightarrow +\infty$. Par continuité de Φ et symétrie de la loi normale centrée réduite,

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \theta = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Quand la dispersion devient très grande devant la différence fixée entre le seuil et la moyenne, le modèle normal donne des probabilités de réaction et de non-réaction proches de $1/2$.

4)(a) Méthode 1 — Propriétés d'une fonction de répartition

La fonction $F(y) = 1/(1 + e^{-y})$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puisque son dénominateur est strictement positif. Sa dérivée vaut

$$F'(y) = \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2} > 0.$$

Elle est donc croissante et continue, en particulier continue à droite. Les limites de l'exponentielle donnent

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = 1.$$

Ces propriétés caractérisent une fonction de répartition : F est celle d'une variable suivant la loi logistique.

Méthode 2 — Construction d'une densité

La fonction $f(y) = e^{-y}/(1 + e^{-y})^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Sur tout segment $[a, b]$, on reconnaît la dérivée de F , donc

$$\int_a^b f(y) dy = F(b) - F(a).$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, on obtient une intégrale convergente de valeur 1. La fonction f est donc une densité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^x f(y) dy = F(x) - 0 = F(x).$$

La fonction de répartition de la loi ainsi construite est bien F . La première approche contrôle directement les propriétés de F ; la seconde construit la loi à partir d'une densité et prépare le calcul de la question 4(c).

4)(b) Par la question 1, on a $\theta = F(\alpha)$. Ainsi, dans le modèle logistique,

$$\theta = \frac{1}{1 + e^{-\alpha}}.$$

4)(c) La fonction de répartition est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc la loi est à densité. On peut choisir

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = F'(z) = \frac{e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2}.$$

Cette densité est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, avec une intégrale égale à 1 comme établi en 4(a).

4)(d) Pour $y \geq 0$, on écrit

$$F(-y) = \frac{1}{1 + e^y} = \frac{e^{-y}}{1 + e^{-y}} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-y}} = 1 - F(y).$$

Ainsi $F(y) + F(-y) = 1$. La même identité est en fait valable pour tout réel y .

4)(e) Il faut d'abord vérifier l'existence de l'espérance. Pour $z \geq 0$,

$$0 \leq z f_Z(z) = \frac{z e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2} \leq z e^{-z}.$$

L'intégrale de cette dernière fonction est convergente : une intégration par parties sur $[0, A]$ donne

$$\int_0^A z e^{-z} dz = 1 - (A + 1)e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1.$$

La densité est paire, puisque

$$f_Z(-z) = \frac{e^z}{(1 + e^z)^2} = \frac{e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2} = f_Z(z).$$

Par le changement de variable affine $z = -t$ d'abord sur un segment, puis par passage à la limite, l'intégrale de $|z|f_Z(z)$ sur $]-\infty, 0]$ égale celle de $z f_Z(z)$ sur $[0, +\infty[$. Elle est donc également finie. L'espérance existe absolument.

La fonction $z \mapsto z f_Z(z)$ est impaire et absolument intégrable. Ses intégrales sur les deux demi-droites se compensent, d'où

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz = 0.$$

4)(f) Posons $T = \ln(U/(1 - U))$. La loi uniforme sur $]0, 1[$ permet de définir cette expression presque sûrement. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, par croissance de l'exponentielle et parce que $1 - U > 0$,

$$T \leq t \iff \frac{U}{1-U} \leq e^t \iff U \leq \frac{e^t}{1+e^t}.$$

Le seuil $e^t/(1+e^t)$ appartient à $]0, 1[$. La fonction de répartition de la loi uniforme donne alors

$$P(T \leq t) = \frac{e^t}{1+e^t} = \frac{1}{1+e^{-t}} = F(t).$$

La variable $\ln(U/(1 - U))$ suit donc la loi logistique.

II — Règles de décisions stochastiques : le modèle de Luce

5) Considérons un choix réalisé dans T et notons C_T l'action choisie, de loi P_T . Pour $S \subset T$ et $a \in S$, l'événement $[C_T = a]$ est inclus dans $[C_T \in S]$. De plus,

$$P(C_T \in S) = P_T(S) = \sum_{b \in S} P_T(b) > 0,$$

car les probabilités élémentaires sont strictement positives. On peut donc conditionner par cet événement. La condition (*) équivaut à

$$P(C_T = a \mid C_T \in S) = \frac{P_T(a)}{P_T(S)} = P_S(a).$$

Conditionnellement au fait que l'action choisie dans T appartient à S , sa loi doit être la même que si le choix avait été effectué directement dans S . Cette hypothèse relie les probabilités de choix dans différents ensembles.

6)(a) Par (*) avec $T = A$, pour tout $a \in S$,

$$P_A(a) = P_A(S)P_S(a).$$

Le nombre $P_A(S)$ est strictement positif. Comme $v(a) = kP_A(a)$ et $k > 0$,

$$\sum_{b \in S} v(b) = k \sum_{b \in S} P_A(b) = kP_A(S) > 0.$$

Il en résulte

$$\frac{v(a)}{\sum_{b \in S} v(b)} = \frac{kP_A(a)}{kP_A(S)} = P_S(a).$$

La formule (1) est ainsi établie, et l'utilité construite est strictement positive sur A .

6)(b) Question adaptée au programme actuel : la stricte positivité de v et w est explicitée pour que le coefficient de proportionnalité soit positif.

Utilisons (1) avec $S = A$. Pour tout $a \in A$,

$$\frac{v(a)}{\sum_{b \in A} v(b)} = P_A(a) = \frac{w(a)}{\sum_{b \in A} w(b)}.$$

Les deux sommes sont strictement positives. En multipliant par celle qui concerne v , on obtient

$$v(a) = \mu w(a), \quad \mu = \frac{\sum_{b \in A} v(b)}{\sum_{b \in A} w(b)} > 0.$$

Le coefficient μ ne dépend pas de a , donc $v = \mu w$. Les utilités positives associées au modèle sont déterminées à un facteur multiplicatif positif près. Sans hypothèse de positivité, les fonctions v et $-v$ donneraient les mêmes quotients dans (1) mais ne seraient pas proportionnelles avec un facteur positif ; la précision est donc indispensable.

7) Pour chaque $S \in \mathcal{F}$, notons

$$V_S = \sum_{b \in S} v(b).$$

Cet ensemble est fini et non vide, et tous les termes sont strictement positifs, donc

$V_S > 0$. Pour tout $a \in S$, $Q_S(a) = v(a)/V_S > 0$, et

$$\sum_{a \in S} Q_S(a) = \frac{\sum_{a \in S} v(a)}{V_S} = 1.$$

On définit bien une probabilité sur l'ensemble fini S . Si $S \subset T$, alors

$$Q_T(S) = \sum_{b \in S} \frac{v(b)}{V_T} = \frac{V_S}{V_T}.$$

Ainsi, pour $a \in S$,

$$Q_T(S)Q_S(a) = \frac{V_S}{V_T} \frac{v(a)}{V_S} = \frac{v(a)}{V_T} = Q_T(a).$$

Le système $(Q_S)_{S \in \mathcal{F}}$ vérifie donc (*).

8)(a) Pour un même ensemble S , le dénominateur

$$V_S = \sum_{c \in S} v(c)$$

est commun à toutes les actions et strictement positif. Par conséquent,

$$v(a) \leq v(b) \iff \frac{v(a)}{V_S} \leq \frac{v(b)}{V_S} \iff P_S(a) \leq P_S(b).$$

L'ordre des probabilités de choix est donc celui des utilités au sein d'un ensemble fixé.

8)(b) L'utilité étant strictement positive, la fonction $\rho(a) = \ln v(a)$ est bien définie sur A .
Pour $a \neq b$,

$$P(a, b) = \frac{v(a)}{v(a) + v(b)} = \frac{1}{1 + v(b)/v(a)} = \frac{1}{1 + \exp(\rho(b) - \rho(a))}.$$

Cette fonction ρ convient. Une multiplication de v par une constante positive ajouterait une même constante à toutes les valeurs de ρ ; les différences intervenant dans la formule resteraient inchangées.

8)(c) On reconnaît la fonction de répartition logistique :

$$P(a, b) = \frac{1}{1 + \exp(-[\rho(a) - \rho(b)])} = F(\rho(a) - \rho(b)).$$

Le choix $\alpha_{a,b} = \rho(a) - \rho(b)$ donne donc

$$P(a, b) = P(X \leq \alpha_{a,b}).$$

9)(a) Méthode 1 — Condition de cohérence des choix

La condition (*) fournit $P_T(a) = P_T(S)P_S(a)$ et $P_T(b) = P_T(S)P_S(b)$. Tous ces facteurs sont strictement positifs. En divisant les égalités, on obtient

$$\frac{P_T(a)}{P_T(b)} = \frac{P_T(S)P_S(a)}{P_T(S)P_S(b)} = \frac{P_S(a)}{P_S(b)}.$$

Méthode 2 — Représentation par les utilités

La question 6(a) permet de choisir une utilité positive v commune à tous les ensembles.
Pour tout ensemble S contenant a et b ,

$$\frac{P_S(a)}{P_S(b)} = \frac{v(a)/V_S}{v(b)/V_S} = \frac{v(a)}{v(b)}.$$

La même expression vaut dans T , d'où l'égalité demandée. La première preuve utilise directement l'hypothèse du modèle; la seconde met en évidence une quantité, le rapport des utilités, indépendante de l'ensemble des choix proposés.

9)(b) Appliquons 9(a) avec $S = \{V, R\}$ et $T = A$. Puisque $P(V, R) = 1/2$, les deux probabilités dans ce choix binaire valent $1/2$ et leur rapport vaut 1. Ainsi

$$\frac{P_A(V)}{P_A(R)} = 1.$$

De même, $P(V, B) = 1/2$ donne $P_A(V)/P_A(B) = 1$. Les trois probabilités sont donc égales. Leur somme étant 1,

$$P_A(V) = P_A(R) = P_A(B) = \frac{1}{3}.$$

Le modèle donne alors une probabilité totale de choisir le bus égale à $2/3$, contre $1/3$ pour la voiture. Si l'indifférence entre «voiture» et «bus» signifie une probabilité $1/2$ pour chaque mode de transport, ce résultat n'est pas satisfaisant : le simple fait de dédoubler une option par une couleur modifie le choix entre les modes. Ce paradoxe montre la limite de l'hypothèse (*) lorsque deux options, ici les deux bus, sont fortement substituables. Il ne constitue pas une contradiction dans le calcul des probabilités défini par les hypothèses formelles.

III — Utilités aléatoires

10)(a) Pour tout réel x , l'événement $[U \leq x]$ est exactement l'intersection des événements $[U_i \leq x]$ pour $1 \leq i \leq n$. Par indépendance,

$$G_n(x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [U_i \leq x]\right) = \prod_{i=1}^n F_i(x).$$

Si toutes les variables ont la même fonction de répartition F , alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = F(x)^n.$$

10)(b) Pour x fixé, le nombre $F(x)$ appartient à $[0, 1]$. La limite d'une suite géométrique donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) < 1, \\ 1 & \text{si } F(x) = 1. \end{cases}$$

Cette limite ponctuelle n'est pas nécessairement une fonction de répartition. Par exemple, si $F(x) < 1$ pour tout réel x , elle est identiquement nulle : il ne faut donc pas en déduire une convergence en loi vers une variable réelle.

10)(c) Supposons $G_n = F$ pour tout $n \geq 1$. En prenant $n = 2$, pour tout x ,

$$F(x)^2 = F(x), \quad \text{donc } F(x) \in \{0, 1\}.$$

Les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$ montrent que F prend effectivement la valeur 0 en certains points et la valeur 1 en d'autres. L'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}$ est non vide et minoré. Posons $c = \inf E \in \mathbb{R}$.

Si $x < c$, alors $x \notin E$ et $F(x) = 0$. Si $x > c$, la définition de l'infimum donne un élément $y \in E$ tel que $y < x$; la croissance de F entraîne $F(x) \geq F(y) = 1$, donc $F(x) = 1$. Enfin, la continuité à droite de toute fonction de répartition donne $F(c) = 1$.

Ainsi F est la fonction de répartition d'une variable égale à c presque sûrement.

Réciproquement, si les U_i sont égales presque sûrement à une même constante c , leur maximum vaut c presque sûrement et a la même loi. Les lois cherchées sont exactement les lois certaines.

11)(a) La variable considérée possède une densité f , donc sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x < y$,

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt.$$

Cette intégrale est strictement positive. En effet, on peut choisir un point de continuité t_0 de f dans $]x, y[$, puisque les éventuels points de discontinuité sont en nombre fini. On a $f(t_0) > 0$, donc, par continuité, f est minorée par $f(t_0)/2 > 0$ sur un petit segment de longueur positive contenu dans $]x, y[$. L'intégrale sur ce segment est strictement positive, et celle sur le reste est positive ou nulle.

La fonction F est donc strictement croissante. Comme toute fonction de répartition, elle vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

La stricte croissance assure aussi $0 < F(x) < 1$ pour tout réel x . Par continuité et par le théorème des valeurs intermédiaires, chaque valeur de $]0, 1[$ est atteinte; par stricte

croissance, elle ne l'est qu'une fois. Ainsi F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

11)(b) Fixons un réel x et posons $q = F(x) \in]0, 1[$. Pour tout $n \geq 1$,

$$F(x + b_{n+1}) = q^{n+1} < q^n = F(x + b_n).$$

Comme F est strictement croissante, cela impose $b_{n+1} < b_n$. La suite est donc strictement décroissante, en particulier décroissante au sens demandé. En prenant $n = 1$, la relation $F(x + b_1) = F(x)$ et l'injectivité donnent $b_1 = 0$. On en déduit notamment $b_2 < 0$.

11)(c) Méthode 1 — Lemme des coalitions

Chaque Y_j est une fonction des variables du bloc

$$(U_{(j-1)N+1}, \dots, U_{jN}).$$

Les blocs correspondant à des indices j distincts sont disjoints. Les variables $U_1, \dots, U_{nN}$ étant mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions assure que les variables obtenues en appliquant une fonction à chaque bloc sont mutuellement indépendantes. Les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont donc indépendantes.

Méthode 2 — Factorisation directe des probabilités

Pour des réels $t_1, \dots, t_n$,

$$\bigcap_{j=1}^n [Y_j \leq t_j] = \bigcap_{j=1}^n \bigcap_{i=(j-1)N+1}^{jN} [U_i \leq t_j].$$

Tous les événements du membre de droite portent sur des variables distinctes de la famille indépendante. Ainsi

$$P \left(\bigcap_{j=1}^n [Y_j \leq t_j] \right) = \prod_{j=1}^n \prod_{i=(j-1)N+1}^{jN} P(U_i \leq t_j) = \prod_{j=1}^n F(t_j)^N.$$

Pour chaque j , le même calcul sur un seul bloc donne $P(Y_j \leq t_j) = F(t_j)^N$. La probabilité de l'intersection est donc le produit des probabilités marginales. En prenant

des différences entre les valeurs aux bornes dans chacune des variables, on obtient la même factorisation pour les événements $[s_j < Y_j \leq t_j]$; les intervalles non bornés s'obtiennent par passage à la limite. On retrouve ainsi la définition de l'indépendance par les intervalles. La première méthode est immédiate lorsque les blocs sont identifiés; la seconde explique directement pourquoi le maximum préserve cette indépendance entre blocs.

11)(d) Un bloc contient N variables indépendantes de même fonction de répartition F . Par la question 10(a), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(Y_j \leq x) = F(x)^N = F(x + b_N).$$

Cette fonction de répartition ne dépend pas de j .

11)(e) La variable $\max(Y_1, \dots, Y_n)$ est le maximum de toutes les nN variables initiales, donc sa fonction de répartition vaut $F(x)^{nN}$. D'autre part, les Y_j sont indépendantes et ont pour fonction de répartition $x \mapsto F(x + b_N)$. La fonction de répartition de leur maximum vaut donc

$$[F(x + b_N)]^n = F(x + b_N + b_n),$$

en appliquant la propriété de stabilité à l'argument réel $x + b_N$. La même propriété, avec l'entier nN , donne

$$F(x)^{nN} = F(x + b_{nN}).$$

On a par conséquent, pour tout réel x ,

$$F(x)^{nN} = F(x + b_n + b_N) = F(x + b_{nN}).$$

Par injectivité de F , $x + b_n + b_N = x + b_{nN}$, d'où

$$b_{nN} = b_n + b_N.$$

11)(f) Fixons $n \geq 1$. Pour $k = 0$, on a $n^0 = 1$ et $b_{n^0} = b_1 = 0 = 0b_n$. Supposons $b_{n^k} = kb_n$ pour un entier $k \geq 0$. Par 11(e),

$$b_{n^{k+1}} = b_{n^k n} = b_{n^k} + b_n = (k + 1)b_n.$$

La récurrence établit donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_{n^k} = kb_n.$$

11)(g) Les logarithmes sont définis, et $\ln 2 > 0$. Les inégalités demandées équivalent à

$$k_m \leq m \frac{\ln p}{\ln 2} < k_m + 1.$$

Comme $p \geq 1$, le nombre $m \ln p / \ln 2$ est positif ou nul. Sa partie entière est donc l'unique entier naturel qui convient :

$$k_m = \left\lfloor m \frac{\ln p}{\ln 2} \right\rfloor.$$

En divisant l'encadrement par $m > 0$, on obtient

$$0 \leq \frac{\ln p}{\ln 2} - \frac{k_m}{m} < \frac{1}{m}.$$

Le théorème d'encadrement donne $k_m/m \rightarrow \ln p / \ln 2$. Si $p = 1$, tous les k_m sont nuls et la conclusion reste valable.

11)(h) Les indices vérifient $2^{k_m} \leq p^m < 2^{k_m+1}$. Par décroissance de la suite (b_n) ,

$$b_{2^{k_m}} \geq b_{p^m} \geq b_{2^{k_m+1}}.$$

La question 11(f) transforme cet encadrement en

$$k_m b_2 \geq m b_p \geq (k_m + 1) b_2.$$

Après division par $m > 0$,

$$\frac{k_m}{m} b_2 \geq b_p \geq \left(\frac{k_m}{m} + \frac{1}{m} \right) b_2.$$

Les deux bornes tendent vers $b_2 \ln p / \ln 2$ d'après 11(g). On en conclut que

$$b_p = \frac{b_2}{\ln 2} \ln p.$$

Le réel $\gamma = b_2 / \ln 2$ convient donc pour tout entier $p \geq 1$. Il est strictement négatif, puisque $b_2 < 0$. Le cas $p = 1$ donne bien $b_1 = \gamma \ln 1 = 0$.

11)(i) La fonction $F(x) = \exp(-e^{-x})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x}) > 0.$$

Ses limites valent 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Elle est donc une fonction de répartition et admet la densité continue strictement positive F' . Pour tout entier $n \geq 1$,

$$F(x)^n = \exp(-ne^{-x}) = \exp(-e^{-(x-\ln n)}) = F(x - \ln n).$$

La relation de stabilité est vérifiée avec $b_n = -\ln n \leq 0$. La fonction satisfait ainsi toutes les conditions cherchées ; elle définit la loi de Gumbel. Dans cet exemple, $\gamma = -1$.

12)(a) La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc une densité de X est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x}).$$

Sa positivité et sa continuité sont immédiates. Sur tout segment $[a, b]$, l'intégrale de $f_X = F'$ vaut $F(b) - F(a)$; en passant aux limites, on obtient une intégrale totale de 1, ce qui confirme qu'il s'agit bien d'une densité.

12)(b) La variable $Z = e^{-X}$ est strictement positive. Pour $z \leq 0$, $P(Z \leq z) = 0$. Pour $z > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante, donc

$$P(Z \leq z) = P(X \geq -\ln z) = 1 - F(-\ln z),$$

car X possède une densité et n'a donc pas d'atome. Or

$$F(-\ln z) = \exp(-e^{\ln z}) = e^{-z}.$$

Ainsi

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ 1 - e^{-z} & \text{si } z > 0. \end{cases}$$

On reconnaît la loi exponentielle de paramètre 1 : $Z \sim \mathcal{E}(1)$.

12)(c) Méthode 1 — Calcul direct des probabilités conditionnelles

Comme $x + y > x > 0$, on a $-\ln(x + y) < -\ln x$. L'événement $[X \leq -\ln(x + y)]$ est donc inclus dans $[X \leq -\ln x]$. Le conditionnement est licite, puisque $F(-\ln x) = e^{-x} > 0$. Par

définition,

$$P_{[X \leq -\ln x]}(X \leq -\ln(x+y)) = \frac{F(-\ln(x+y))}{F(-\ln x)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}} = e^{-y}.$$

Or $P(X \leq -\ln y) = F(-\ln y) = e^{-y}$. Ainsi

$$P_{[X \leq -\ln x]}(X \leq -\ln(x+y)) = P(X \leq -\ln y).$$

Méthode 2 — Absence de mémoire de l'exponentielle

D'après 12(b), $Z = e^{-X}$ suit la loi exponentielle de paramètre 1. Comme l'exponentielle utilisée est décroissante,

$$[X \leq -\ln x] = [Z \geq x], \quad [X \leq -\ln(x+y)] = [Z \geq x+y].$$

L'absence de mémoire de la loi exponentielle donne, pour $x, y > 0$,

$$P(Z \geq x+y \mid Z \geq x) = P(Z \geq y).$$

Les égalités ou inégalités strictes aux seuils ont ici la même probabilité, puisque la loi est à densité. Enfin, $[Z \geq y] = [X \leq -\ln y]$, ce qui redonne la relation. Le calcul direct utilise seulement la fonction de répartition; la seconde preuve montre que cette propriété de Gumbel est la traduction de l'absence de mémoire après transformation exponentielle.

12)(d) Calculons la fonction de répartition de W en conditionnant par L . On a $W \geq 0$, donc $P(W \leq t) = 0$ pour $t < 0$. Pour $t \geq 0$, si $L = 0$, la condition $W \leq t$ est toujours satisfaite. Si $L = k \geq 1$, l'indépendance de L et de la suite, puis celle des Y_i , donnent

$$P(W \leq t \mid L = k) = P(Y_1 \leq t, \dots, Y_k \leq t) = (1 - e^{-t})^k.$$

Comme $L \sim \mathcal{P}(1)$, le système complet des événements $[L = k]$ fournit

$$P(W \leq t) = e^{-1} + e^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-t})^k}{k!}.$$

La série exponentielle converge pour le réel $1 - e^{-t}$. Ainsi

$$P(W \leq t) = e^{-1} \exp(1 - e^{-t}) = \exp(-e^{-t}) = F(t) \quad (t \geq 0).$$

La fonction de répartition de W coïncide donc avec celle de X sur $[0, +\infty[$. Elle est continue en tout $a > 0$, donc $P(W = a) = 0$ pour un tel a . Pour $0 < a < b$, X n'a pas non plus d'atome et

$$P(a \leq W \leq b) = F_W(b) - F_W(a) = F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b).$$

Enfin, $W \geq 0$, donc

$$P(W = 0) = F_W(0) = \exp(-1) = e^{-1}.$$

On peut aussi vérifier cette dernière valeur directement : si $L = 0$, $W = 0$; si $L = k \geq 1$, les exponentielles sont strictement positives presque sûrement, donc leur maximum ne vaut pas 0. Par la formule des probabilités totales, $P(W = 0) = P(L = 0) = e^{-1}$.

Il ne faut pas conclure que W suit la loi de Gumbel sur toute la droite : W possède un atome en 0 et ne prend pas de valeurs négatives, contrairement à X . Sa loi est celle de $\max(0, X)$.

Relevé des adaptations

2(b) — La définition d'un estimateur sans biais est ajoutée. La question est conservée et résolue par la linéarité de l'espérance, sans supposer un chapitre théorique sur le biais.

3(a)–3(c) — Les facteurs sont explicitement construits à partir d'une même suite indépendante de variables centrées réduites, et la tolérance dépendant de n est notée $X^{(n)}$. Les hypothèses de moments par ligne du texte original ne suffisent pas à justifier la

conclusion asymptotique demandée en 3(b). La construction ajoutée permet d'utiliser exactement le théorème limite central du programme, tout en conservant les espérances, variances et objectifs des questions. La distinction entre approximation normale et modèle normal est précisée en 3(c).

6(b) — Les fonctions d'utilité sont supposées strictement positives. Cette précision garantit $\mu > 0$; l'assertion ne serait pas correcte pour deux fonctions réelles de signes opposés donnant les mêmes quotients.

11, préambule — Le cadre des densités à limites latérales finies et à un nombre fini de discontinuités est explicité conformément au programme. Aucune propriété de la loi étudiée ni aucune question n'est supprimée.