



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2010

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

I — Généralités sur la loi exponentielle

1.a) Le paramètre μ est strictement positif. Les formules de la loi exponentielle donnent $E(X) = 1/\mu$ et $V(X) = 1/\mu^2$.

1.b) Pour chaque entier $n \geq 0$, le théorème de transfert conduit à l'intégrale positive

$$E(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x} dx,$$

sous réserve de sa convergence. Par croissances comparées, $x^n e^{-\mu x/2} \rightarrow 0$. Ainsi, pour x assez grand, $0 \leq x^n \mu e^{-\mu x} \leq \mu e^{-\mu x/2}$. L'intégrale de droite converge ; l'intégrande de gauche est continu sur tout segment de $\mathbb{R}_+$. La comparaison prouve donc l'existence de $E(X^n)$ pour chaque n .

Sur $[0, A]$, une intégration par parties, avec la primitive $-e^{-\mu x}$ de $\mu e^{-\mu x}$, donne

$$\int_0^A x^{n+1} \mu e^{-\mu x} dx = -A^{n+1} e^{-\mu A} + (n+1) \int_0^A x^n e^{-\mu x} dx.$$

Le terme au bord tend vers zéro, encore par croissances comparées. Les intégrales convergent d'après le résultat précédent. En passant à la limite,

$$E(X^{n+1}) = \frac{n+1}{\mu} E(X^n).$$

Cette relation est valable dès $n = 0$; le moment initial est $E(X^0) = 1$.

1.c) Une récurrence à partir du moment initial donne

$$E(X^n) = \frac{n!}{\mu^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

En effet, la formule vaut pour $n = 0$, et la relation de 1.b) transforme $n!/\mu^n$ en $(n+1)!/\mu^{n+1}$. Tous ces moments existent, comme établi précédemment.

1.d) Les moments d'ordres un et deux valent $1/\mu$ et $2/\mu^2$. La formule de Koënik-Huygens est applicable puisque le moment d'ordre deux est fini. Elle donne

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}.$$

2.a) Pour $x \geq 0$, l'intégration de la densité donne $P(X > x) = e^{-\mu x} > 0$. Le conditionnement est donc bien défini. Pour $y \geq 0$, l'événement $[X > x + y]$ est inclus dans $[X > x]$, d'où

$$P_{[X > x]}(X > x + y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = \frac{e^{-\mu(x+y)}}{e^{-\mu x}} = e^{-\mu y} = P(X > y).$$

Il s'agit de l'absence de mémoire de la loi exponentielle, y compris lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.

2.b.i) Pour $x \geq 0$, on a $R(x) = \int_x^{+\infty} f(u) du$. La fonction f est continue et strictement positive sur le segment $[x, x + 1]$. Son intégrale sur ce segment est donc strictement positive. Ainsi,

$$R(x) \geq \int_x^{x+1} f(u) du > 0.$$

En particulier, tous les conditionnements utilisés dans cette question ont une probabilité strictement positive.

2.b.ii) La propriété supposée équivaut à $R(x + y) = R(x)R(y)$. Cette identité reste vraie lorsque l'un des deux arguments est nul, car X est positive et à densité, donc $R(0) = 1$.

Fixons $x \geq 0$. Pour $h > 0$,

$$\frac{R(x + h) - R(x)}{h} = R(x) \frac{R(h) - R(0)}{h}.$$

La continuité de f sur $\mathbb{R}_+$ assure $R'(x) = -f(x)$, avec une dérivée à droite à l'origine. En faisant tendre h vers zéro, on obtient $R'(x) = R(x)R'(0) = -f(0)R(x)$. En posant $\mu = f(0) > 0$, il vient bien

$$R'(x) + \mu R(x) = 0.$$

2.b.iii) Le produit est dérivable pour $x > 0$ et dérivable à droite en zéro. La règle du produit et la relation précédente donnent

$$\frac{d}{dx}(R(x)e^{\mu x}) = e^{\mu x}(R'(x) + \mu R(x)) = 0.$$

La fonction est donc constante sur $\mathbb{R}_+$; sa continuité en zéro et $R(0) = 1$ fixent cette constante à un.

2.b.iv) On déduit de 2.b.iii) que $R(x) = e^{-\mu x}$ pour $x \geq 0$. Comme X est positive, sa fonction de répartition est nulle pour $x < 0$ et vaut $1 - e^{-\mu x}$ pour $x \geq 0$. C'est exactement la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\mu = f(0) > 0$. L'égalité des fonctions de répartition identifie donc la loi de X .

3.a) Pour $y < 0$, $F_Y(y) = 0$. Pour $y \geq 0$, on utilise $[Y \leq y] = [X_1 \leq y] \cap [X_2 \leq y]$ et l'indépendance :

$$F_Y(y) = (1 - e^{-\mu_1 y})(1 - e^{-\mu_2 y}).$$

Cette expression tend vers zéro lorsque $y \rightarrow 0^+$; elle se raccorde donc continûment à la valeur nulle sur $] -\infty, 0[$. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$. En développant avant de dériver, on obtient une densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} \mu_1 e^{-\mu_1 y} + \mu_2 e^{-\mu_2 y} - (\mu_1 + \mu_2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)y} & \text{si } y \geq 0, \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Sa positivité se lit aussi dans l'écriture $\mu_1 e^{-\mu_1 y}(1 - e^{-\mu_2 y}) + \mu_2 e^{-\mu_2 y}(1 - e^{-\mu_1 y})$. La valeur choisie en zéro vaut zéro ; les limites latérales y sont finies. La fonction de répartition continue et de classe C^1 hors de zéro justifie bien que Y est à densité.

3.b) Pour $z \geq 0$, l'événement $[Z > z]$ est $[X_1 > z] \cap [X_2 > z]$. L'indépendance donne

$$P(Z > z) = e^{-\mu_1 z} e^{-\mu_2 z} = e^{-(\mu_1 + \mu_2)z}.$$

Par conséquent, $F_Z(z) = 0$ pour $z < 0$, et $F_Z(z) = 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)z}$ pour $z \geq 0$. La somme $\mu_1 + \mu_2$ étant strictement positive, Z suit la loi exponentielle de paramètre $\mu_1 + \mu_2$.

II — Fiabilité

1) Une variable à densité ne charge aucun point : $P(T = t) = P(T = t + h) = 0$. Ainsi,

$$P(t \leq T \leq t + h) = F_T(t + h) - F_T(t) = R_T(t) - R_T(t + h).$$

La formule vaut également pour $t = 0$, car $P(T = 0) = 0$.

2) D'après la question précédente,

$$\frac{P(t \leq T \leq t + h)}{h} = \frac{F_T(t + h) - F_T(t)}{h}.$$

La continuité de f_T donne $F'_T(t) = f_T(t)$, avec une dérivée à droite lorsque $t = 0$. Le quotient tend donc vers $f_T(t)$ quand $h \rightarrow 0^+$. Cette limite mesure la dégradation par unité de temps sur un intervalle très court.

3.a) La densité f_T est positive sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est positive ou nulle en tant que densité, et elle ne s'y annule pas. Pour $t > 0$, sa continuité assure

$$R_T(t) = \int_t^{+\infty} f_T(u) du \geq \int_t^{t+1} f_T(u) du > 0.$$

En outre, $R_T(0) = 1$. Le quotient définissant λ est donc bien défini sur tout $\mathbb{R}_+$; il y est continu, avec continuité à droite en zéro.

3.b) Puisque R_T est strictement positive et $R'_T = -f_T$, les règles de dérivation donnent

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{R_T(t)} \right) = -\frac{R'_T(t)}{R_T(t)} = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \lambda(t).$$

Au point zéro, l'égalité s'entend à droite selon la convention du sujet.

3.c) On intègre l'identité de 3.b) sur le segment $[0, t]$. Comme $R_T(0) = 1$,

$$\ln \left(\frac{1}{R_T(t)} \right) = \int_0^t \lambda(u) du.$$

L'exponentiation donne la formule de fiabilité

$$R_T(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(u) du \right) \quad (t \geq 0).$$

Le taux de défaillance détermine donc entièrement la fiabilité.

4.a) La continuité de g implique $R'_Z = -g$. En dérivant le produit $v(t) = tR_Z(t)$, on obtient $v'(t) = R_Z(t) - tg(t)$, soit

$$tg(t) = R_Z(t) - v'(t).$$

Cette identité est également valable pour les dérivées à droite en zéro.

4.b) L'espérance de Z existe et Z est positive, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} ug(u) du$ converge. Pour $t \geq 0$, on a $t \leq u$ lorsque $u \geq t$. Par positivité,

$$0 \leq v(t) = t \int_t^{+\infty} g(u) du \leq \int_t^{+\infty} ug(u) du.$$

Le dernier membre est un reste d'intégrale convergente; il tend vers zéro. Le théorème d'encadrement prouve $v(t) \rightarrow 0$. Il n'a pas été nécessaire de supposer une décroissance particulière de la densité.

4.c) On intègre l'égalité de 4.a) sur $[0, A]$. Comme $v(0) = 0$,

$$\int_0^A tg(t) dt = \int_0^A R_Z(t) dt - AR_Z(A).$$

Le membre de gauche tend vers $E(Z)$, et le dernier terme tend vers zéro par 4.b). Il s'ensuit que l'intégrale de R_Z , positive, converge et que

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} R_Z(t) dt.$$

La convergence de l'intégrale de fiabilité a ainsi été démontrée avant de l'utiliser comme espérance.

5.a) Question adaptée au programme actuel. La définition précise que T_t représente le temps restant sous la loi conditionnelle à $[T > t]$. Cette précision évite de confondre cette loi avec celle de $T - t$ sans conditionnement.

Le dénominateur $P(T > t) = R_T(t)$ est strictement positif d'après 3.a). Pour $x \geq 0$, $[T > t + x]$ est inclus dans $[T > t]$. La définition d'une probabilité conditionnelle donne

donc

$$R_{T_t}(x) = P_{[T > t]}(T > t + x) = \frac{P(T > t + x)}{P(T > t)} = \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)}.$$

La formule vaut en particulier pour $x = 0$, où elle donne un.

5.b) Méthode 1 — La fiabilité de la durée résiduelle

On vérifie d'abord l'existence de l'espérance nécessaire à l'application de 4.c). La fonction de répartition de T_t vaut zéro pour $x < 0$ et $1 - R_T(t + x)/R_T(t)$ pour $x \geq 0$. Elle est continue en zéro et dérivable sur $]0, +\infty[$. Une densité de T_t est donc

$$g_t(x) = \begin{cases} f_T(t + x)/R_T(t) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sur $\mathbb{R}_+$, cette densité est continue. Pour $A > 0$, le changement affine $u = t + x$ et la positivité donnent

$$0 \leq \int_0^A x g_t(x) dx = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{t+A} (u - t) f_T(u) du \leq \frac{E(T)}{R_T(t)}.$$

Les intégrales partielles sont donc majorées ; le moment d'ordre un existe. On peut maintenant appliquer 4.c) à T_t , puis utiliser 5.a) :

$$E(T_t) = \int_0^{+\infty} \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)} dx = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u) du.$$

Le changement affine s'effectue d'abord sur $[0, A]$, puis on passe à la limite ; la convergence est assurée par 4.c) appliquée à T .

Méthode 2 — Le moment calculé avec la densité

La densité g_t et l'existence du moment viennent d'être établies. On peut donc calculer directement

$$E(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} (u - t) f_T(u) du.$$

Sur $[t, B]$, une intégration par parties utilisant $R'_T = -f_T$ donne

$$\int_t^B (u - t) f_T(u) du = -(B - t)R_T(B) + \int_t^B R_T(u) du.$$

Le terme au bord tend vers zéro : $0 \leq (B - t)R_T(B) \leq BR_T(B) \rightarrow 0$ par 4.b). On retrouve ainsi

$$E(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u) du.$$

La première méthode exploite une identité générale démontrée pour la fiabilité ; la seconde montre directement comment le moment de la loi résiduelle se transforme en une intégrale de fiabilité.

6.a) La loi exponentielle donne $R_T(t) = e^{-\mu t}$ pour $t \geq 0$. Sa densité vaut $\mu e^{-\mu t}$ sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent,

$$\lambda(t) = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu.$$

Le taux de défaillance est constant : le vieillissement du système n'augmente pas ici le risque instantané de panne.

6.b) En série, la première panne d'un organe entraîne celle du système :

$T = \min(T_1, T_2)$. Pour $t \geq 0$, l'indépendance donne

$$R_T(t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = e^{-\mu_1 t} e^{-\mu_2 t} = e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}.$$

Il s'agit de la fiabilité d'une loi exponentielle de paramètre $\mu_1 + \mu_2$. Sa densité sur $\mathbb{R}_+$ est $(\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}$. Le taux est donc constant et vaut $\lambda(t) = \mu_1 + \mu_2$.

6.c) En parallèle, il faut attendre que les deux organes soient en panne : $T = \max(T_1, T_2)$. Le calcul de I.3.a) s'applique, car les durées de vie sont indépendantes. Pour $t \geq 0$,

$$R_T(t) = 1 - P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = 1 - (1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t}),$$

soit

$$R_T(t) = e^{-\mu_1 t} + e^{-\mu_2 t} - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}.$$

Cette fiabilité est supérieure ou égale à chacune des fiabilités individuelles, conformément au fonctionnement en parallèle.

7.a) La fonction $\varphi_{n,\beta}$ est positive et continue sauf éventuellement en zéro, où les limites latérales sont finies. Pour $n = 1$, la valeur à droite est β ; pour $n > 1$, elle est nulle.

Soit X de loi exponentielle de paramètre β . Le moment de I.1.c) donne, avec convergence déjà établie,

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt = \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} \beta e^{-\beta t} dt = \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}} = 1.$$

La fonction est donc une densité de probabilité. Le nom de loi d'Erlang désigne ici cette densité explicitement définie; aucune propriété d'une autre famille de lois n'est nécessaire.

7.b) Méthode 1 — Une récurrence par intégration par parties

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$, posons

$$J_m(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\beta(\beta u)^m}{m!} e^{-\beta u} du.$$

La convergence découle de I.1.b). On a $J_0(t) = e^{-\beta t}$. Pour $m \geq 1$, on intègre par parties sur $[t, B]$, avec la primitive $-e^{-\beta u}$ du facteur $\beta e^{-\beta u}$. On obtient

$$\int_t^B \frac{\beta(\beta u)^m}{m!} e^{-\beta u} du = \frac{(\beta t)^m}{m!} e^{-\beta t} - \frac{(\beta B)^m}{m!} e^{-\beta B} + \int_t^B \frac{\beta(\beta u)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\beta u} du.$$

Le terme en B tend vers zéro. Il vient $J_m(t) = e^{-\beta t}(\beta t)^m/m! + J_{m-1}(t)$. En itérant cette identité jusqu'à J_0 ,

$$R_T(t) = J_{n-1}(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

Méthode 2 — Vérifier directement une primitive

Définissons

$$H(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} (\beta t)^k / k!.$$

Pour $n \geq 2$, la dérivation de la somme finie donne

$$H'(t) = -\beta e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + \beta e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\beta t)^k}{k!} = -\frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t}.$$

Pour $n = 1$, on a directement $H'(t) = -\beta e^{-\beta t} = -\varphi_{1,\beta}(t)$. Dans tous les cas, $H' = -\varphi_{n,\beta}$ et $H(t) \rightarrow 0$ à l'infini, car chaque terme est un polynôme multiplié par une exponentielle décroissante. L'intégration sur $[t, B]$, suivie de $B \rightarrow +\infty$, donne

$$\int_t^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(u) du = H(t).$$

La première méthode construit la formule par récurrence ; la seconde est plus rapide lorsque la forme de la somme finie est déjà suggérée par l'énoncé.

8.a) Pour $\beta \geq 1$, la fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est positive. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et possède une limite finie à droite en zéro : cette limite vaut $1/\eta$ si $\beta = 1$ et zéro si $\beta > 1$. La limite à gauche est nulle.

Pour $t > 0$, la règle de dérivation donne

$$\frac{d}{dt}e^{-(t/\eta)^\beta} = -\frac{\beta}{\eta}(t/\eta)^{\beta-1}e^{-(t/\eta)^\beta} = -\psi_{\beta,\eta}(t).$$

En intégrant sur un segment $[a, A]$ avec $0 < a < A$, puis en faisant tendre a vers zéro, on obtient $\int_0^A \psi_{\beta,\eta}(t) dt = 1 - e^{-(A/\eta)^\beta}$. Comme $\beta > 0$, le dernier terme exponentiel tend vers zéro lorsque $A \rightarrow +\infty$. L'intégrale totale vaut donc un. Toutes les conditions d'une densité sont satisfaites.

8.b) Le même calcul, effectué de t à A puis à la limite, donne

$$R_T(t) = e^{-(t/\eta)^\beta} \quad (t \geq 0).$$

Cette fiabilité est strictement positive. Le quotient de la densité par la fiabilité donne

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}.$$

En zéro, ce taux vaut $1/\eta$ si $\beta = 1$, et zéro si $\beta > 1$, conformément à la définition de la densité et à $R_T(0) = 1$.

8.c) Le domaine des paramètres est $\beta \geq 1$. Si $\beta = 1$, le taux est constant égal à $1/\eta$, donc sa limite vaut $1/\eta$. Si $\beta > 1$, l'exposant $\beta - 1$ est strictement positif : $(t/\eta)^{\beta-1} \rightarrow +\infty$, donc $\lambda(t) \rightarrow +\infty$. Aucun cas $\beta < 1$ n'appartient au modèle de cette question.

III — Système poissonien

1.a) Pour $s \in [0, 1]$ et $N_u \in \mathbb{N}$, la convention $0^0 = 1$ assure $0 \leq s^{N_u} \leq 1$. Cette variable bornée admet donc une espérance. Le théorème de transfert pour la variable discrète N_u donne

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k) s^k.$$

La série est absolument convergente, puisque $0 \leq P(N_u = k) s^k \leq P(N_u = k)$ et que les probabilités ont pour somme un. En particulier, $G_u(0) = P(N_u = 0)$ et $G_u(1) = 1$.

1.b) Si $u, v > 0$, écrivons $N_{u+v} = N_u + (N_{u+v} - N_u)$. Les accroissements indépendants assurent l'indépendance de N_u et de $N_{u+v} - N_u$. Les accroissements stationnaires

donnent à la seconde variable la loi de N_v . Les deux facteurs s^{N_u} et $s^{N_{u+v}-N_u}$ sont bornés ; leur produit est intégrable, et l'indépendance donne

$$G_{u+v}(s) = E(s^{N_u} s^{N_{u+v}-N_u}) = E(s^{N_u}) E(s^{N_{u+v}-N_u}) = G_u(s) G_v(s).$$

L'égalité $s^{a+b} = s^a s^b$ reste vraie pour $s = 0$ et $a, b \in \mathbb{N}$ avec la convention annoncée. Si $u = 0$ ou $v = 0$, le résultat découle de $N_0 = 0$ et $G_0(s) = 1$. La formule est ainsi valable dans tous les cas demandés.

2.a) Comme $G_1(s) \geq P(N_1 = 0) > 0$, son logarithme est défini. En outre, $G_1(s) \leq 1$, donc $\theta(s) = -\ln G_1(s) \geq 0$. Pour $s < 1$, on a même $G_1(s) < 1$: la probabilité $P(N_1 \geq 1)$ est strictement positive et $s^k < 1$ pour $k \geq 1$. La positivité stricte de θ n'est toutefois pas nécessaire aux encadrements suivants.

2.b) La formule de 1.b) donne $\psi(u+v) = \psi(u)\psi(v)$ et $\psi(0) = 1$. Par récurrence sur l'entier k , $\psi(k) = \psi(1)^k$. Or $\psi(1) = G_1(s) = e^{-\theta(s)}$. Par conséquent,

$$\psi(k) = e^{-k\theta(s)} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

2.c) En appliquant q fois la relation multiplicative à la somme de q termes égaux à $1/q$, on obtient

$$G_1(s) = (G_{1/q}(s))^q.$$

Le facteur $G_{1/q}(s)$ est strictement positif, puisqu'il est au moins égal à $P(N_{1/q} = 0) > 0$. La racine positive de $e^{-\theta(s)}$ est donc imposée, ce qui donne $\psi(1/q) = e^{-\theta(s)/q}$.

2.d) On écrit p/q comme une somme de p termes égaux à $1/q$. La propriété multiplicative fournit

$$\psi(p/q) = (\psi(1/q))^p = e^{-p\theta(s)/q}.$$

Si $p = 0$, cette égalité se réduit à $\psi(0) = 1$. Elle vaut donc pour tout rationnel positif ou nul $r = p/q$.

2.e) La monotonie du comptage permet de passer des rationnels aux réels sans supposer une continuité préalable de $u \mapsto G_u(s)$. Si $a \leq b$, alors $N_a \leq N_b$, donc $s^{N_a} \geq s^{N_b}$ pour $s \in [0, 1[$. Ainsi, ψ est décroissante.

Pour un réel $u \geq 0$ et un entier $n \geq 1$, posons $a_n = \lfloor nu \rfloor / n$ et $b_n = (\lfloor nu \rfloor + 1) / n$. Ces nombres sont rationnels et vérifient $a_n \leq u \leq b_n$, avec $a_n \rightarrow u$ et $b_n \rightarrow u$. La décroissance et 2.d) donnent

$$e^{-b_n \theta(s)} = \psi(b_n) \leq \psi(u) \leq \psi(a_n) = e^{-a_n \theta(s)}.$$

Les deux bornes tendent vers $e^{-u\theta(s)}$ par continuité de l'exponentielle. Le théorème d'encadrement prouve donc $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$.

2.f) Pour $s < 1$, le résultat précédent donne $G_h(s) = e^{-h\theta(s)}$. La dérivabilité de l'exponentielle en zéro entraîne

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h(s) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h\theta(s)} - 1}{h} = -\theta(s).$$

Pour $s = 1$, on a $G_h(1) = 1$; le quotient est nul. La formule se prolonge donc à $s = 1$ en posant $\theta(1) = 0$.

3) Les deux séries

$$\sum_{k \geq 0} P(N_h = k) s^k$$

et

$$\sum_{k \geq 0} P(N_h = k)$$

convergent absolument, pour tout $s \in [0, 1]$. Leur différence peut donc être calculée terme à terme :

$$G_h(s) - 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k) (s^k - 1).$$

Le terme de rang zéro est nul, grâce à la convention $s^0 = 1$. En isolant le terme de rang

un, on obtient exactement

$$G_h(s) - 1 = P(N_h = 1)(s - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1).$$

- 4) Pour $s \in [0, 1]$, $-1 \leq s^k - 1 \leq 0$. La série du numérateur est absolument convergente et vérifie, pour $h > 0$,

$$\left| \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} \right| \leq \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)}{h} = \frac{P(N_h > 1)}{h}.$$

La dernière quantité tend vers zéro par la quatrième hypothèse du modèle. Le quotient demandé tend donc vers zéro. Cette majoration contrôle toute la somme ; aucun échange entre une limite et une série n'est requis.

5.a) On commence par choisir $s = 0$ dans l'identité de 3). Avec le résultat de 4), il vient

$$\frac{G_h(0) - 1}{h} = -\frac{P(N_h = 1)}{h} + o(1).$$

La limite du membre de gauche vaut $-\theta(0)$ d'après 2.f). Ainsi, le quotient $P(N_h = 1)/h$ possède une limite finie $\alpha = \theta(0)$. Comme ce quotient est positif ou nul, $\alpha \geq 0$.

Reprenons maintenant 3) pour un $s \in [0, 1]$ quelconque, divisons par h et faisons tendre h vers zéro. Les limites établies donnent $-\theta(s) = \alpha(s - 1)$, soit

$$\theta(s) = \alpha(1 - s).$$

Le recours initial à $s = 0$ évite toute division par $s - 1$ au point $s = 1$.

5.b) D'après 1.a), 2.e) et 5.a), pour $u > 0$,

$$P(N_u = 0) = G_u(0) = e^{-u\theta(0)} = e^{-\alpha u}.$$

La première hypothèse impose $P(N_u = 0) < 1$. Si $\alpha = 0$, cette probabilité serait égale à un, ce qui est exclu. Comme $\alpha \geq 0$, on conclut $\alpha > 0$.

6.a) Pour $u > 0$ et $s \in [0, 1]$, les questions précédentes donnent

$$G_u(s) = e^{-\alpha u(1-s)} = e^{-\alpha u} e^{\alpha u s}.$$

La série exponentielle est convergente et a pour somme l'exponentielle. Par conséquent,

$$G_u(s) = e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha u s)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k.$$

La première expression de 1.a) fournit l'autre somme annoncée. On utilise uniquement la série exponentielle connue, sans résultat général sur les séries entières.

6.b) Il faut justifier que l'égalité des sommes impose celle des probabilités. Posons $p_k = P(N_u = k)$ et $q_k = e^{-\alpha u} (\alpha u)^k / k!$. Les nombres p_k sont positifs ou nuls et de somme un. Il en est de même des q_k , par la série exponentielle. La question 6.a) donne

$$\sum_{k \geq 0} p_k s^k = \sum_{k \geq 0} q_k s^k$$

pour $s \in [0, 1]$.

Pour $s = 0$, cette égalité donne $p_0 = q_0$. Supposons maintenant que $p_k = q_k$ pour $k < m$. Pour $0 < s < 1$, on soustrait les termes de rang inférieur à m , puis on divise par s^m :

$$p_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} p_k s^{k-m} = q_m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} q_k s^{k-m}.$$

Les deux restes satisfont

$$0 \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} p_k s^{k-m} \leq s \sum_{k=m+1}^{+\infty} p_k \leq s,$$

et la même majoration vaut avec q_k . En faisant tendre s vers zéro, les deux restes tendent donc vers zéro, et $p_m = q_m$. Une récurrence prouve l'égalité pour tout $m \in \mathbb{N}$.

On a ainsi démontré, sans utiliser un théorème d'identification extérieur au programme,

$$P(N_u = k) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Comme $\alpha u > 0$, c'est la loi de Poisson de paramètre αu .

7) Par définition de la première panne, $T > t$ signifie qu'aucune panne ne s'est produite sur $[0, t]$. Les événements $[T > t]$ et $[N_t = 0]$ sont donc égaux. Pour $t > 0$,

$$P(T > t) = P(N_t = 0) = e^{-\alpha t}.$$

Comme T est positive, sa fonction de répartition est nulle pour $t < 0$. La formule précédente et la continuité à droite d'une fonction de répartition donnent aussi $P(T \leq 0) = 0$. Sa fonction de répartition vaut donc $1 - e^{-\alpha t}$ pour $t \geq 0$. Ainsi, T suit la loi exponentielle de paramètre α .

8.a) Le nombre N_{t+h} compte les pannes sur $[0, t+h]$ et N_t celles sur $[0, t]$. Leur différence compte exactement les pannes de $]t, t+h]$. L'extrémité gauche est exclue car une panne à la date t est déjà comptée dans N_t et se trouve retranchée. Pour $h = 0$, l'intervalle est vide et $\tilde{N}_0 = 0$.

8.b) On vérifie les quatre propriétés du modèle pour le comptage décalé.

Tout d'abord, $\tilde{N}_0 = 0$. Pour $h > 0$, la stationnarité des accroissements donne à $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ la loi de N_h . Par conséquent, $0 < P(\tilde{N}_h = 0) < 1$ et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(\tilde{N}_h > 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(N_h > 1)}{h} = 0.$$

Ensuite, si $0 \leq h_0 < h_1 < \dots < h_n$, les variables $\tilde{N}_{h_0}$ et $\tilde{N}_{h_j} - \tilde{N}_{h_{j-1}}$ sont respectivement les comptages sur les intervalles successifs $]t, t+h_0]$ et $]t+h_{j-1}, t+h_j]$. Elles sont indépendantes par l'hypothèse sur les accroissements du processus initial. Si $h_0 = 0$, la première variable est constante nulle, ce qui ne change pas l'indépendance.

Enfin, pour $0 < a < b$,

$$\tilde{N}_b - \tilde{N}_a = N_{t+b} - N_{t+a}$$

suit la loi de N_{b-a} . La variable $\tilde{N}_{b-a}$ suit elle aussi cette loi. Les accroissements du comptage décalé sont donc stationnaires. Sa monotonie découle de celle de N .

Les quatre propriétés sont vérifiées. D'après 6.b), $\tilde{N}_h$ suit la loi de Poisson de paramètre αh pour $h > 0$. Le processus décalé possède donc le même paramètre α que le processus initial.

8.c) Question adaptée au programme actuel. Le temps d'attente et la date absolue doivent être distingués.

Notons W_t le délai entre la date t et la première panne strictement postérieure à t . C'est la date de première panne pour le processus décalé $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$. Les questions 7) et 8.b) donnent, pour $x \geq 0$,

$$P(W_t > x) = P(\tilde{N}_x = 0) = e^{-\alpha x}.$$

Ainsi, W_t suit la loi exponentielle de paramètre α . Si D_t désigne la date absolue de cette panne, $D_t = t + W_t$. Sa fonction de répartition vaut zéro pour $d < t$ et $1 - e^{-\alpha(d-t)}$ pour $d \geq t$; pour $t > 0$, cette date absolue ne suit donc pas elle-même une loi exponentielle de support $\mathbb{R}_+$.

8.d) À partir de la date t , le temps jusqu'à la prochaine panne a la loi de W_t , exponentielle de paramètre α . Sa fiabilité au délai $x \geq 0$ est $e^{-\alpha x}$ et sa densité vaut $\alpha e^{-\alpha x}$. Son taux de défaillance est donc

$$\frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha x}} = \alpha.$$

Il est constant par rapport au délai et ne dépend pas de la date t . Le système réparé immédiatement présente ainsi le même taux instantané de panne après chaque date d'observation fixée.

Relevé des adaptations

II.5), préambule et 5.a) : la durée de survie est définie comme ayant la loi de $T - t$ sous la probabilité conditionnelle à $[T > t]$. Cette précision répare la confusion possible avec $T - t$ sans conditionnement, tout en conservant les deux questions et leurs formules.

II.7) et II.8), définitions : la valeur des facteurs de puissance d'exposant nul en zéro est

explicitée pour les paramètres $n = 1$ et $\beta = 1$. Les formules originales sont conservées ; les deux lois sont étudiées directement à partir de leurs densités.

III.2.f) : la valeur $\theta(1) = 0$ est explicitée, car les questions précédentes avaient d'abord défini θ pour $s < 1$, alors que la limite demandée inclut $s = 1$.

III.8.c) : la conclusion porte sur le délai après t , de loi exponentielle, et précise que la date absolue est ce délai augmenté de t . La formulation originale confondait ces deux quantités.