



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2009

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Tout au long du sujet, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires utilisées. Sous réserve d'existence, l'espérance d'une variable aléatoire réelle X est notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$. Pour un événement B de probabilité strictement positive, $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B .

Un estimateur d'une quantité $g(\theta)$ est une variable aléatoire calculée à partir des observations, par une formule indépendante du paramètre inconnu θ . Sa valeur observée est une estimation. Il est dit sans biais lorsque $E_\theta(T) = g(\theta)$ pour toute valeur admissible de θ . L'indice θ rappelle que la loi des observations dépend du paramètre; on l'omettra lorsque cela ne crée pas d'ambiguïté.

Le sujet est composé de quatre parties. Les parties I, II, III et IV.A sont indépendantes. Il s'agit de variations autour de la notion de risque quadratique en estimation.

I — Premier problème d'estimation

On dispose d'une seule observation, notée X . On suppose que X admet pour densité la fonction f_θ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^k & \text{pour } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est un entier naturel non nul et θ un paramètre réel inconnu strictement positif que l'on souhaite estimer.

I.1 Montrer que f_θ est bien une densité de probabilité.

I.2 Calculer $E(X)$.

I.3 Déterminer λ_0 , réel dépendant uniquement de k , tel que $\lambda_0 X$ estime θ sans biais.

I.4 Calculer $V(X)$.

Pour un estimateur T de θ admettant un moment d'ordre deux, on définit son risque quadratique par

$$R(T, \theta) = E((T - \theta)^2).$$

I.5 Démontrer que, pour tout tel estimateur T ,

$$R(T, \theta) = (E(T) - \theta)^2 + V(T).$$

I.6 Donner la valeur de $R(\lambda_0 X, \theta)$.

Le but de la fin de cette partie est de déterminer un estimateur de θ ayant un risque quadratique plus petit que celui de $\lambda_0 X$.

I.7 En utilisant I.5, montrer que, pour tout réel λ ,

$$R(\lambda X, \theta) = \theta^2 Q(\lambda),$$

où Q est un polynôme de degré deux dont les coefficients ne dépendent que de k .

I.8 Montrer que la fonction $\lambda \mapsto Q(\lambda)$ atteint son minimum en un unique réel noté λ^* , que l'on exprimera en fonction de k .

I.9 Conclure sur le but recherché.

II — Second problème d'estimation

On dispose de n observations indépendantes, avec $n \geq 2$, notées $X_1, \dots, X_n$, de même loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta \in]0, +\infty[$. On souhaite estimer $\exp(-\theta)$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit Y_i par $Y_i = 1$ si $X_i = 0$ et $Y_i = 0$ sinon. On note

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

II.1 Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donner la loi de Y_i .

II.2 Donner la loi de

$$\sum_{i=1}^n Y_i,$$

puis montrer que $E(\bar{Y}_n) = \exp(-\theta)$. On dira dans ce cas que $\bar{Y}_n$ est un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$.

II.3 Calculer $V(\bar{Y}_n)$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

II.4 Rappeler sans démonstration la loi de S_k , pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, pour tout entier naturel j , on définit

$$\varphi(j) = P_{[S_n=j]}(X_1 = 0).$$

II.5 Montrer que, pour tout entier naturel j ,

$$\varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j.$$

Ainsi, $\varphi(j)$ ne dépend pas du paramètre inconnu θ . On peut définir l'estimateur

$$\varphi(S_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}.$$

II.6 Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $E(\varphi(S_n)) = \exp(-\theta)$. On dira dans ce cas que $\varphi(S_n)$ est un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$.

II.7 Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance vérifiant

$$V(\varphi(S_n)) = \exp(-2\theta) \left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1 \right).$$

II.8 On souhaite comparer les performances de $\bar{Y}_n$ et $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateurs de $\exp(-\theta)$.

II.8 a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que

$$1 \leq \frac{\exp(\theta) - 1}{\theta} \leq \exp(\theta).$$

II.8 b) Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = t \exp(\theta) + (1 - t) - \exp(t\theta).$$

Étudier les variations de h .

II.8 c) En déduire que

$$\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leq \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n},$$

puis l'inégalité $V(\varphi(S_n)) \leq V(\bar{Y}_n)$.

II.8 d) Pour un estimateur T_n de $\exp(-\theta)$ admettant un moment d'ordre deux, on définit

$$R(T_n, \exp(-\theta)) = E((T_n - \exp(-\theta))^2).$$

Comparer les risques quadratiques de $\bar{Y}_n$ et de $\varphi(S_n)$.

On reprendra l'étude de $\varphi(S_n)$ à la fin de la partie IV.

III — Information de Fisher

A — Cas discret

Dans cette section, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\theta \in I$ est un paramètre inconnu, et X une variable aléatoire à valeurs dans un même ensemble $D \subset \mathbb{N}$ pour tout θ . On suppose qu'il existe une fonction p définie sur $I \times D$, strictement positive, telle que

$$P_\theta(X = k) = p(\theta, k),$$

et que, pour chaque $k \in D$, la fonction $\theta \mapsto p(\theta, k)$ soit dérivable sur I . La notation ∂_θ signifie que l'on dérive par rapport au paramètre, en gardant k fixé.

On définit, sous réserve d'existence, la quantité appelée information de Fisher de X par

$$I_X(\theta) = \sum_{k \in D} (\partial_\theta \ln p(\theta, k))^2 p(\theta, k).$$

Toutes les propriétés de cette quantité utilisées dans le problème devront être établies dans les questions qui suivent ou faire partie des seuls résultats particuliers explicitement admis.

III.A.1 On considère X de loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in]0, 1[$. Alors $D = \{0, 1\}$, $p(\theta, 1) = \theta$ et $p(\theta, 0) = 1 - \theta$. On a

$$I_X(\theta) = (\partial_\theta \ln p(\theta, 1))^2 p(\theta, 1) + (\partial_\theta \ln p(\theta, 0))^2 p(\theta, 0).$$

Montrer que $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$.

III.A.2 On considère X de loi binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 1[$.

III.A.2 a) Montrer que

$$I_X(\theta) = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2} \sum_{k=0}^N (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}.$$

III.A.2 b) En déduire que $I_X(\theta) = \frac{V(X)}{(\theta(1-\theta))^2}$, puis donner la valeur de $I_X(\theta)$.

III.A.3 On considère X de loi de Poisson de paramètre $\theta \in]0, +\infty[$.

Puisque $D = \mathbb{N}$, on a, sous réserve de convergence,

$$I_X(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\partial_\theta \ln p(\theta, k))^2 p(\theta, k).$$

III.A.3 a) Montrer que cette série converge et calculer sa somme $I_X(\theta)$.

III.A.3 b) Justifier que

$$I_X(\theta) = E_\theta \left((\partial_\theta \ln p(\theta, X))^2 \right),$$

où la dérivée est calculée à valeur fixée de la deuxième variable, avant d'y substituer X .

B — Cas d'une variable gaussienne

Soit X de loi normale de moyenne $\theta \in \mathbb{R}$ et de variance 1, dont la densité est notée $x \mapsto f(\theta, x)$. On définit, sous réserve de convergence,

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_\theta \ln f(\theta, x))^2 f(\theta, x) dx.$$

III.B.1 Montrer que, sous réserve de convergence,

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \theta)^2 f(\theta, x) dx.$$

III.B.2 En déduire l'existence et la valeur de $I_X(\theta)$.

III.B.3 Justifier que

$$I_X(\theta) = E_\theta \left((\partial_\theta \ln f(\theta, X))^2 \right),$$

avec la même convention de dérivation que dans III.A.3 b).

IV — Minoration du risque quadratique

A — Une inégalité dans le cas d'un ensemble fini de valeurs

Dans cette section, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ et $\theta \in I$. La variable X prend ses valeurs dans $\{0, \dots, N\}$. Pour chaque $k \in \{0, \dots, N\}$, on suppose que $p(\theta, k) = P_\theta(X = k)$ est strictement positif et que la fonction $\theta \mapsto p(\theta, k)$ est de classe C^2 sur I . L'information $I_X(\theta)$ définie en III est supposée non nulle pour tout $\theta \in I$.

Soit f une fonction réelle sur $\{0, \dots, N\}$, indépendante de θ , telle que $E_\theta(f(X)) = g(\theta)$ pour tout $\theta \in I$, où g est dérivable. Le but est d'établir, dans ce seul cadre fini, l'inégalité

$$V_\theta(f(X)) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_X(\theta)}.$$

IV.A.1 Montrer que, pour tout $\theta \in I$,

$$\sum_{k=0}^N \partial_\theta p(\theta, k) = 0.$$

IV.A.2 En déduire que, pour tout $\theta \in I$,

$$E_\theta(\partial_\theta \ln p(\theta, X)) = 0. \quad (E)$$

IV.A.3 En dérivant par rapport à θ les deux membres de (E), écris comme une somme finie dont les probabilités dépendent aussi de θ , montrer que

$$E_{\theta}(\partial_{\theta}^2 \ln p(\theta, X)) = -E_{\theta}((\partial_{\theta} \ln p(\theta, X))^2).$$

IV.A.4 Montrer que, pour tout $\theta \in I$,

$$g'(\theta) = \sum_{k=0}^N f(k) (\partial_{\theta} \ln p(\theta, k)) p(\theta, k),$$

puis que

$$g'(\theta) = E_{\theta}((f(X) - g(\theta)) \partial_{\theta} \ln p(\theta, X)).$$

IV.A.5 Pour tout réel t , on pose

$$L(t) = E_{\theta}((f(X) - g(\theta) + t \partial_{\theta} \ln p(\theta, X))^2).$$

IV.A.5 a) Développer le polynôme L suivant les puissances décroissantes de t .

IV.A.5 b) Calculer le discriminant Δ de L et justifier que $\Delta \leq 0$.

IV.A.5 c) En déduire l'inégalité annoncée dans ce cadre fini.

B — Bornes particulières pour l'échantillon de Poisson

On reprend les notations et hypothèses de II : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$, avec $n \geq 2$. On admet les deux seuls résultats suivants.

Soit $T_n = \psi(X_1, \dots, X_n)$, où ψ ne dépend pas de θ , et supposons que $E_\theta(T_n^2) < +\infty$ pour tout $\theta > 0$.

Si $E_\theta(T_n) = \theta$ pour tout $\theta > 0$, alors $V_\theta(T_n) \geq \theta/n$ pour tout $\theta > 0$.

Si $E_\theta(T_n) = e^{-\theta}$ pour tout $\theta > 0$, alors $V_\theta(T_n) \geq \theta e^{-2\theta}/n$ pour tout $\theta > 0$.

Il s'agit d'exploiter ces bornes dans le modèle considéré. On note

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

IV.B.1 Calculer $E(\bar{X}_n)$ et $V(\bar{X}_n)$.

IV.B.2 Dédurre de la première borne admise que $\bar{X}_n$ a le plus petit risque quadratique parmi les estimateurs sans biais de θ vérifiant les hypothèses énoncées.

IV.B.3 Pour $g(\theta) = \exp(-\theta)$, avec $\theta > 0$, montrer que

$$V(\varphi(S_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(g'(\theta))^2}{n I_{X_1}(\theta)}.$$

IV.B.4 Que prouve ce résultat en termes d'optimalité de $\varphi(S_n)$ dans l'estimation de $\exp(-\theta)$?

IV.B.5 À la lumière de la partie I, peut-on conclure que, lorsque n est grand, $\varphi(S_n)$ est le meilleur estimateur de $\exp(-\theta)$ en termes de risque quadratique ?