



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**ESSEC**

Mathématiques 2 — Option économique

**2009**

*Mathématiques appliquées*

---

**Mathématiques appliquées — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## I — Premier problème d'estimation

Le paramètre  $\theta > 0$  est fixé dans les calculs d'espérance. La variable  $X$  prend presque sûrement ses valeurs dans  $[0, \theta]$  ; toutes ses puissances entières positives ont donc une espérance finie.

I.1 La fonction  $f_\theta$  est positive, nulle en dehors de  $[0, \theta]$  et continue sauf éventuellement en  $\theta$ . Ses limites latérales sont finies en tout réel. Sa masse totale vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x) dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int_0^\theta x^k dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \frac{\theta^{k+1}}{k+1} = 1.$$

Elle satisfait donc les conditions permettant d'être une densité de probabilité.

I.2 L'intégrale donnant l'espérance converge absolument, car l'intégrande est continue sur un segment et nulle ailleurs. Ainsi,

$$E(X) = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int_0^\theta x^{k+1} dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \frac{\theta^{k+2}}{k+2} = \frac{k+1}{k+2} \theta.$$

I.3 Question adaptée au programme actuel : la définition de « sans biais » est fournie dans le préambule du sujet.

Par linéarité,  $E(\lambda_0 X) = \lambda_0 \frac{k+1}{k+2} \theta$ . Comme  $\theta > 0$ , l'égalité  $E(\lambda_0 X) = \theta$  équivaut à

$$\lambda_0 = \frac{k+2}{k+1}.$$

Ce coefficient dépend uniquement de  $k$ , donc l'estimateur est effectivement calculable sans connaître  $\theta$ . Il est sans biais pour toute valeur  $\theta > 0$ .

I.4 Le second moment existe, puisque  $0 \leq X^2 \leq \theta^2$  presque sûrement. Par transfert,

$$E(X^2) = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int_0^\theta x^{k+2} dx = \frac{k+1}{k+3} \theta^2.$$

La formule de Koenig-Huygens donne

$$V(X) = \theta^2 \left( \frac{k+1}{k+3} - \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} \right).$$

Pour réduire cette différence, on utilise  $(k+2)^2 - (k+1)(k+3) = 1$ . On obtient

$$V(X) = \frac{(k+1)\theta^2}{(k+3)(k+2)^2}.$$

Cette variance est strictement positive.

I.5 Question adaptée au programme actuel : l'identité est démontrée à partir de la définition donnée du risque ; elle n'est pas supposée connue comme un résultat de cours d'estimation. L'hypothèse de moment d'ordre deux garantit l'existence des termes utilisés.

Écrivons  $T - \theta = (T - E(T)) + (E(T) - \theta)$ . En développant le carré et en prenant l'espérance, on obtient

$$R(T, \theta) = E((T - E(T))^2) + 2(E(T) - \theta)E(T - E(T)) + (E(T) - \theta)^2.$$

Or  $E(T - E(T)) = 0$  et  $E((T - E(T))^2) = V(T)$ . Par conséquent,

$$R(T, \theta) = V(T) + (E(T) - \theta)^2.$$

Le risque se décompose en une variance et le carré de l'écart entre l'espérance et la quantité estimée.

I.6 L'estimateur  $\lambda_0 X$  est sans biais d'après I.3. Son risque est donc sa variance. Par I.4,

$$R(\lambda_0 X, \theta) = \lambda_0^2 V(X) = \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2} \frac{(k+1)\theta^2}{(k+3)(k+2)^2} = \frac{\theta^2}{(k+1)(k+3)}.$$

I.7 Pour tout réel  $\lambda$ , la variable  $\lambda X$  est bornée et admet donc un moment d'ordre deux. L'identité de I.5 donne

$$R(\lambda X, \theta) = \left( \lambda \frac{k+1}{k+2} \theta - \theta \right)^2 + \lambda^2 \frac{(k+1)\theta^2}{(k+3)(k+2)^2}.$$

Le coefficient de  $\lambda^2$ , après factorisation par  $\theta^2$ , vaut

$$\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} + \frac{k+1}{(k+3)(k+2)^2} = \frac{(k+1)((k+1)(k+3)+1)}{(k+3)(k+2)^2} = \frac{k+1}{k+3}.$$

Ainsi,

$$Q(\lambda) = \frac{k+1}{k+3}\lambda^2 - 2\frac{k+1}{k+2}\lambda + 1.$$

Son coefficient dominant est strictement positif et ses coefficients ne dépendent que de  $k$ .

## I.8 Méthode 1 — Dérivation

Le polynôme  $Q$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$Q'(\lambda) = 2\frac{k+1}{k+3}\lambda - 2\frac{k+1}{k+2} = 2\frac{k+1}{k+3}\left(\lambda - \frac{k+3}{k+2}\right).$$

Le facteur  $2(k+1)/(k+3)$  est strictement positif. La dérivée est donc négative avant  $\lambda^* = (k+3)/(k+2)$ , nulle en ce point et positive après. Le polynôme admet un unique minimum global en

$$\lambda^* = \frac{k+3}{k+2}.$$

## Méthode 2 — Mise sous forme canonique

En complétant le carré dans l'expression de I.7, on obtient

$$Q(\lambda) = \frac{k+1}{k+3}\left(\lambda - \frac{k+3}{k+2}\right)^2 + \frac{1}{(k+2)^2}.$$

En effet, le terme constant issu du carré est  $(k+1)(k+3)/(k+2)^2$  et son complément à 1 est  $1/(k+2)^2$ . Le premier terme est positif ou nul et s'annule uniquement pour  $\lambda = \lambda^*$ . Cela établit directement l'unicité du minimum et sa valeur  $Q(\lambda^*) = 1/(k+2)^2$ .

La dérivation fournit les variations; la forme canonique donne en plus la valeur minimale sans substitution supplémentaire.

I.9 Le coefficient  $\lambda^*$  est connu puisque  $k$  est connu. L'estimateur  $\lambda^*X$  a pour risque

$$R(\lambda^*X, \theta) = \frac{\theta^2}{(k+2)^2}.$$

Or  $(k+2)^2 = (k+1)(k+3) + 1 > (k+1)(k+3)$ . Comme  $\theta > 0$ ,

$$R(\lambda^*X, \theta) < R(\lambda_0X, \theta).$$

L'amélioration est valable pour toute valeur admissible de  $\theta$ . L'estimateur amélioré est biaisé, puisque

$$E(\lambda^* X) - \theta = \left( \frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2} - 1 \right) \theta = -\frac{\theta}{(k+2)^2}.$$

Accepter ce biais permet ici de diminuer suffisamment la variance pour réduire le risque total.

## II — Second problème d'estimation

---

Dans cette partie, on pose  $p = e^{-\theta}$ . Puisque  $\theta > 0$ , on a  $0 < p < 1$ .

II.1 La variable  $Y_i$  est l'indicatrice de l'événement  $[X_i = 0]$ . Elle ne prend que les valeurs 0 et 1, et

$$P(Y_i = 1) = P(X_i = 0) = e^{-\theta} = p.$$

Elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

II.2 Les variables  $Y_i$  sont des fonctions respectives des variables indépendantes  $X_i$ . Le lemme des coalitions assure leur indépendance mutuelle. Elles ont toutes la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Par stabilité des sommes de Bernoulli indépendantes,

$$\sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Les variables étant bornées, leurs espérances existent. Par linéarité,

$$E(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \frac{np}{n} = e^{-\theta}.$$

La formule de  $\bar{Y}_n$  ne dépend pas de  $\theta$ ; cet estimateur est donc sans biais de  $e^{-\theta}$ .

II.3 Les  $Y_i$  ont chacune pour variance  $p(1 - p)$ . Leur indépendance donne

$$V(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(Y_i) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})}{n}.$$

On pourra aussi utiliser la forme

$$V(\bar{Y}_n) = \frac{e^{-2\theta}}{n}(e^{\theta} - 1).$$

II.4 Une somme de variables de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson dont le paramètre est la somme des paramètres. Ainsi, pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$S_k \sim \mathcal{P}(k\theta).$$

II.5 La loi de  $S_n$  donne, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$P(S_n = j) = e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^j}{j!} > 0.$$

Le conditionnement utilisé dans la définition de  $\varphi(j)$  est donc légitime. Comme  $n \geq 2$ , la somme  $S_n - X_1 = X_2 + \dots + X_n$  suit la loi  $\mathcal{P}((n-1)\theta)$  et est indépendante de  $X_1$ . Par conséquent,

$$P([X_1 = 0] \cap [S_n = j]) = P(X_1 = 0)P(X_2 + \dots + X_n = j) = e^{-n\theta} \frac{((n-1)\theta)^j}{j!}.$$

En divisant par  $P(S_n = j)$ , on obtient

$$\varphi(j) = \left( \frac{n-1}{n} \right)^j.$$

Cette formule vaut aussi pour  $j = 0$ , auquel cas la probabilité conditionnelle vaut 1. Le coefficient  $1 - 1/n$  est connu et strictement compris entre 0 et 1;  $\varphi(S_n)$  est donc bien un estimateur calculable.

II.6 Comme  $0 < \varphi(S_n) \leq 1$ , son espérance existe.

## Méthode 1 — Transfert et série exponentielle

---

Posons  $a = 1 - 1/n$ . Le transfert, appliqué à la loi de  $S_n$ , donne une série à termes positifs :

$$E(a^{S_n}) = e^{-n\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(an\theta)^j}{j!} = e^{-n\theta} e^{an\theta} = e^{-\theta}.$$

La série exponentielle converge pour tout réel, ce qui justifie aussi le calcul de sa somme.

## Méthode 2 — Probabilités totales

---

La définition de  $\varphi(j)$  entraîne

$$\varphi(j)P(S_n = j) = P([X_1 = 0] \cap [S_n = j]).$$

En sommant sur le système complet d'événements  $([S_n = j])_{j \in \mathbb{N}}$  et en utilisant le transfert pour la variable bornée  $\varphi(S_n)$ , on obtient

$$E(\varphi(S_n)) = \sum_{j=0}^{+\infty} P([X_1 = 0] \cap [S_n = j]) = P(X_1 = 0) = e^{-\theta}.$$

Cette deuxième méthode utilise seulement des probabilités conditionnelles d'événements, sans introduire de notion d'espérance conditionnelle. La première est utile pour calculer ensuite d'autres moments ; la seconde explique directement pourquoi la moyenne est conservée.

II.7 La variable  $\varphi(S_n)$  étant bornée, son second moment et sa variance existent. Avec  $a = 1 - 1/n$ , le même calcul de transfert que précédemment donne

$$E(\varphi(S_n)^2) = E((a^2)^{S_n}) = \exp(n\theta(a^2 - 1)).$$

Or  $a^2 - 1 = -2/n + 1/n^2$ . Ainsi,

$$E(\varphi(S_n)^2) = \exp(-2\theta + \theta/n).$$

En retranchant le carré de l'espérance calculée en II.6,

$$V(\varphi(S_n)) = e^{-2\theta+\theta/n} - e^{-2\theta} = e^{-2\theta}(e^{\theta/n} - 1).$$

II.8 a) Question adaptée au programme actuel : l'inégalité des accroissements finis remplace l'égalité des accroissements finis demandée dans le PDF.

Sur  $[0, \theta]$ , la fonction exponentielle est de classe  $C^1$  et sa dérivée vérifie  $1 \leq e^u \leq e^\theta$ .

L'inégalité des accroissements finis donne

$$\theta \leq e^\theta - 1 \leq \theta e^\theta.$$

Comme  $\theta > 0$ , la division par  $\theta$  fournit l'encadrement demandé.

Pour l'étude des variations suivante, on peut préciser que les inégalités sont strictes. En effet,

$$e^\theta - 1 = \int_0^\theta e^u du,$$

et l'intégrande est strictement compris entre 1 et  $e^\theta$  sur l'intervalle ouvert  $]0, \theta[$ . La positivité de l'intégrale d'une fonction continue strictement positive sur un sous-segment donne

$$1 < \frac{e^\theta - 1}{\theta} < e^\theta.$$

II.8 b) La fonction  $h$  est de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$  et

$$h'(t) = e^\theta - 1 - \theta e^{t\theta}, \quad h''(t) = -\theta^2 e^{t\theta} < 0.$$

La dérivée  $h'$  est donc strictement décroissante. En utilisant les inégalités strictes établies en II.8 a),

$$h'(0) = e^\theta - 1 - \theta > 0, \quad h'(1) = e^\theta - 1 - \theta e^\theta < 0.$$

Son unique zéro est

$$t_0 = \frac{1}{\theta} \ln \left( \frac{e^\theta - 1}{\theta} \right),$$

et l'encadrement de II.8 a) assure  $0 < t_0 < 1$ . Ainsi,  $h$  est strictement croissante sur  $[0, t_0]$ , puis strictement décroissante sur  $[t_0, 1]$ . Enfin,  $h(0) = h(1) = 0$ . On en déduit  $h(t) > 0$  pour  $0 < t < 1$ , et  $h(t) \geq 0$  sur tout  $[0, 1]$ .

### II.8 c) Méthode 1 — Exploitation de la fonction auxiliaire

Comme  $n \geq 2$ , on a  $1/n \in ]0, 1[$ . En appliquant la positivité de  $h$  à ce point,

$$0 < h(1/n) = \frac{e^\theta}{n} + \frac{n-1}{n} - e^{\theta/n}.$$

Cela donne l'inégalité demandée, et même sa version stricte. En retranchant 1 puis en multipliant par  $e^{-2\theta} > 0$ ,

$$e^{-2\theta}(e^{\theta/n} - 1) \leq \frac{e^{-2\theta}}{n}(e^\theta - 1).$$

Les expressions de II.3 et II.7 identifient respectivement le membre de droite à  $V(\bar{Y}_n)$  et celui de gauche à  $V(\varphi(S_n))$ . Ainsi,

$$V(\varphi(S_n)) \leq V(\bar{Y}_n).$$

L'inégalité est en fait stricte sous les hypothèses  $n \geq 2$  et  $\theta > 0$ .

### Méthode 2 — Convexité de l'exponentielle

La dérivée seconde de l'exponentielle est positive, donc sa courbe sur  $[0, \theta]$  est située sous la corde joignant ses extrémités. Pour  $t \in [0, 1]$ , cela s'écrit

$$e^{(1-t)0+t\theta} \leq (1-t)e^0 + te^\theta.$$

En prenant  $t = 1/n$ , on obtient directement  $e^{\theta/n} \leq (n-1)/n + e^\theta/n$ . Les mêmes soustraction de 1 et multiplication par  $e^{-2\theta}$  conduisent à la comparaison des variances. Cette lecture géométrique explique le rôle de  $h$  : il mesure précisément l'écart entre la corde et la courbe.

II.8 d) L'identité de I.5, avec  $e^{-\theta}$  à la place de  $\theta$ , se démontre par la même expansion. Les deux estimateurs sont bornés, donc leurs moments d'ordre deux existent ; ils sont sans biais d'après II.2 et II.6. Leurs risques sont donc leurs variances :

$$R(\bar{Y}_n, e^{-\theta}) = \frac{e^{-2\theta}}{n}(e^{\theta} - 1),$$

$$R(\varphi(S_n), e^{-\theta}) = e^{-2\theta}(e^{\theta/n} - 1).$$

La question précédente montre que le second risque est inférieur au premier, strictement pour les paramètres du sujet. L'estimateur  $\varphi(S_n)$  est donc préférable à  $\bar{Y}_n$  au sens du risque quadratique, dans cette comparaison.

### III — Information de Fisher

---

#### A — Cas discret

Question adaptée au programme actuel pour le préambule III.A : la positivité des probabilités sur un support commun est précisée afin de définir leurs logarithmes. La quantité  $I_X(\theta)$  est définie par le sujet ; aucune propriété de théorie statistique n'est supposée connue.

#### III.A.1 Pour $\theta \in ]0, 1[$ , les deux probabilités sont strictement positives.

En dérivant à valeur fixée de  $k$ ,

---

$$\partial_{\theta} \ln p(\theta, 1) = \frac{1}{\theta}, \quad \partial_{\theta} \ln p(\theta, 0) = -\frac{1}{1-\theta}.$$

La définition, qui est ici une somme finie, donne

$$I_X(\theta) = \frac{\theta}{\theta^2} + \frac{1-\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}.$$

#### III.A.2 a) Pour $k \in \{0, \dots, N\}$ , la probabilité $p(\theta, k) = \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}$ est strictement positive. Son logarithme vaut

---

$$\ln p(\theta, k) = \ln \binom{N}{k} + k \ln \theta + (N-k) \ln(1-\theta).$$

Le coefficient binomial ne dépend pas de  $\theta$ . Par conséquent,

$$\partial_{\theta} \ln p(\theta, k) = \frac{k}{\theta} - \frac{N-k}{1-\theta} = \frac{k - N\theta}{\theta(1-\theta)}.$$

En élevant au carré puis en substituant dans la définition de  $I_X$ , on obtient

$$I_X(\theta) = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2} \sum_{k=0}^N (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}.$$

III.A.2 b) La somme précédente est, par transfert,  $E((X - N\theta)^2)$ . Comme  $X$  est binomiale,  $E(X) = N\theta$ ; cette espérance est donc  $V(X) = N\theta(1-\theta)$ . Toutes les sommes étant finies, aucune question de convergence ne se pose. Ainsi,

$$I_X(\theta) = \frac{V(X)}{(\theta(1-\theta))^2} = \frac{N}{\theta(1-\theta)}.$$

**III.A.3 a) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , la loi de Poisson donne  $p(\theta, k) = e^{-\theta} \theta^k / k! > 0$ . On**  
**a**

---

$$\ln p(\theta, k) = -\theta + k \ln \theta - \ln(k!), \quad \partial_\theta \ln p(\theta, k) = \frac{k}{\theta} - 1.$$

La variable  $X$  admet une espérance  $\theta$  et une variance  $\theta$ , donc  $E((X - \theta)^2) = \theta < +\infty$ . Le transfert justifie la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{k}{\theta} - 1 \right)^2 p(\theta, k) = \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \theta)^2 p(\theta, k) = \frac{V(X)}{\theta^2}.$$

Comme  $\theta > 0$ , sa somme vaut

$$I_X(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

III.A.3 b) La fonction appliquée à  $X$  est  $k \mapsto (k/\theta - 1)^2$ . Son espérance existe, puisque la série positive correspondante converge d'après a). Le théorème de transfert permet donc d'écrire

$$E_\theta \left( (\partial_\theta \ln p(\theta, X))^2 \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\partial_\theta \ln p(\theta, k))^2 p(\theta, k) = I_X(\theta).$$

On dérive d'abord la fonction déterministe  $\theta \mapsto \ln p(\theta, k)$ , à  $k$  fixé, puis on remplace  $k$  par la valeur de  $X$ . On ne dérive pas la variable aléatoire  $X$  par rapport au paramètre.

B — Cas d'une variable gaussienne

### III.B.1 La densité de la loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et s'écrit

---

$$f(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \theta)^2}{2}\right).$$

Pour  $x$  fixé,

$$\ln f(\theta, x) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2}(x - \theta)^2, \quad \partial_\theta \ln f(\theta, x) = x - \theta.$$

Le remplacement de cette dérivée dans la définition donne, sous réserve de convergence,

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \theta)^2 f(\theta, x) dx.$$

III.B.2 La loi normale considérée a une variance égale à 1 et une espérance égale à  $\theta$ . Le moment centré d'ordre deux existe donc et vaut 1. Par la définition de ce moment pour une variable à densité, l'intégrale positive de III.B.1 converge et

$$I_X(\theta) = E((X - \theta)^2) = V(X) = 1.$$

### III.B.3 La fonction $x \mapsto (x - \theta)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale de son produit par la densité converge d'après III.B.2. Le transfert s'applique donc et donne

---

$$E_\theta((\partial_\theta \ln f(\theta, X))^2) = E_\theta((X - \theta)^2) = I_X(\theta) = 1.$$

Cette identité repose sur le transfert, sans dérivation d'une intégrale ni d'une espérance.

## IV — Minoration du risque quadratique

---

A — Une inégalité dans le cas d'un ensemble fini de valeurs

Question adaptée au programme actuel pour le préambule IV.A : les probabilités sont supposées strictement positives et de classe  $C^2$  sur un intervalle ouvert, afin que les logarithmes et dérivées secondes demandés existent. Toutes les espérances qui suivent sont des sommes finies. La fonction  $f$  ne dépend pas de  $\theta$ .

Pour alléger les écritures, on pose  $p_k(\theta) = p(\theta, k)$  et  $q_k(\theta) = p'_k(\theta)/p_k(\theta) = \partial_\theta \ln p(\theta, k)$ . Ces quantités sont bien définies pour tout  $k \in \{0, \dots, N\}$  et tout  $\theta \in I$ .

### IV.A.1 Pour chaque $\theta \in I$ , les probabilités d'une loi somment à un :

---

$$\sum_{k=0}^N p_k(\theta) = 1.$$

Chaque fonction est dérivable et la somme est finie. On peut donc dériver terme à terme sans théorème d'échange de limite, ce qui donne

$$\sum_{k=0}^N p'_k(\theta) = 0.$$

### IV.A.2 Le transfert pour la variable finie $X$ et l'égalité $q_k p_k = p'_k$ donnent

---

$$E_\theta(q_X(\theta)) = \sum_{k=0}^N q_k(\theta) p_k(\theta) = \sum_{k=0}^N p'_k(\theta) = 0.$$

Il s'agit exactement de l'identité (E) demandée.

### IV.A.3 Il faut dériver l'expression complète de l'espérance, en tenant compte des probabilités $p_k(\theta)$ . L'identité de IV.A.2 est

---

$$\sum_{k=0}^N q_k(\theta) p_k(\theta) = 0.$$

Les fonctions  $p_k$  sont de classe  $C^2$  et strictement positives ; les fonctions  $q_k$  sont donc dérivables. La dérivation de cette somme finie donne

$$\sum_{k=0}^N q'_k(\theta) p_k(\theta) + \sum_{k=0}^N q_k(\theta) p'_k(\theta) = 0.$$

Comme  $p'_k = q_k p_k$ , il vient

$$\sum_{k=0}^N q'_k(\theta) p_k(\theta) = - \sum_{k=0}^N q_k(\theta)^2 p_k(\theta).$$

Or  $q'_k = \partial_\theta^2 \ln p(\theta, k)$ . Par transfert, cette égalité est précisément

$$E_\theta(\partial_\theta^2 \ln p(\theta, X)) = -E_\theta((\partial_\theta \ln p(\theta, X))^2).$$

L'omission de la dérivée des probabilités aurait conduit à une identité incorrecte.

### IV.A.4 L'hypothèse d'absence de biais s'écrit comme une égalité de fonctions du paramètre :

---

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^N f(k) p_k(\theta).$$

Puisque les valeurs  $f(k)$  ne dépendent pas de  $\theta$  et que la somme est finie,

$$g'(\theta) = \sum_{k=0}^N f(k)p'_k(\theta) = \sum_{k=0}^N f(k)q_k(\theta)p_k(\theta).$$

Cette dernière somme vaut  $E_\theta(f(X)q_X(\theta))$ . D'après IV.A.2,  $E_\theta(q_X(\theta)) = 0$ . On peut donc retrancher  $g(\theta)$  dans le premier facteur sans modifier l'espérance :

$$g'(\theta) = E_\theta((f(X) - g(\theta))q_X(\theta)).$$

**IV.A.5 a) Le carré dans  $L(t)$  est celui de la somme de  $f(X) - g(\theta)$  et de  $tq_X(\theta)$ . En développant et en utilisant la linéarité de l'espérance,**

---

$$L(t) = E_\theta(q_X(\theta)^2)t^2 + 2E_\theta((f(X) - g(\theta))q_X(\theta))t + E_\theta((f(X) - g(\theta))^2).$$

Le premier coefficient est  $I_X(\theta)$  par définition, le deuxième est  $2g'(\theta)$  d'après IV.A.4 et le dernier est  $V_\theta(f(X))$ , puisque  $E_\theta(f(X)) = g(\theta)$ . Ainsi,

$$L(t) = I_X(\theta)t^2 + 2g'(\theta)t + V_\theta(f(X)).$$

**IV.A.5 b) Son discriminant est**

---

$$\Delta = 4(g'(\theta))^2 - 4I_X(\theta)V_\theta(f(X)).$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $L(t)$  est une espérance d'un carré, donc  $L(t) \geq 0$ . De plus,  $I_X(\theta) > 0$ , car c'est une somme de termes positifs ou nuls supposée non nulle. Si  $\Delta$  était strictement positif, le trinôme aurait deux racines réelles distinctes et serait strictement négatif entre elles, ce qui contredirait  $L(t) \geq 0$  pour tout  $t$ . Par conséquent,  $\Delta \leq 0$ .

Ce discriminant est celui d'un polynôme réel de degré deux ; il ne s'agit ni d'un déterminant matriciel ni d'un critère d'extremum pour une fonction de deux variables.

### IV.A.5 c) L'inégalité $\Delta \leq 0$ donne

---

$$(g'(\theta))^2 \leq I_X(\theta) V_\theta(f(X)).$$

En divisant par  $I_X(\theta) > 0$ , on obtient

$$V_\theta(f(X)) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_X(\theta)}.$$

L'inégalité a été entièrement établie dans le cadre fini et régulier précisé dans le sujet ; elle n'est pas utilisée comme un théorème statistique supposé connu.

B — Bornes particulières pour l'échantillon de Poisson

Question adaptée au programme actuel : le théorème général admis dans le PDF est remplacé par les deux seules conséquences nécessaires dans le modèle de Poisson de II.

Résultats admis dans cette version adaptée : pour un estimateur  $T_n = \psi(X_1, \dots, X_n)$ , de formule indépendante de  $\theta$ , ayant un moment d'ordre deux pour chaque  $\theta > 0$ , on dispose des bornes suivantes. S'il est sans biais de  $\theta$  pour tout  $\theta > 0$ , alors  $V_\theta(T_n) \geq \theta/n$ . S'il est sans biais de  $e^{-\theta}$  pour tout  $\theta > 0$ , alors  $V_\theta(T_n) \geq \theta e^{-2\theta}/n$ . La première sert en IV.B.2, la seconde en IV.B.4. Aucun théorème général de minoration n'est ajouté comme connaissance exigible.

### IV.B.1 Chaque $X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta$ , donc admet une espérance et une variance égales à $\theta$ . Par linéarité et indépendance,

---

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \theta,$$

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \theta = \frac{\theta}{n}.$$

L'estimateur  $\bar{X}_n$  est sans biais et possède un moment d'ordre deux pour toute valeur  $\theta > 0$ .

## IV.B.2 Question adaptée au programme actuel : on utilise seulement la première borne particulière admise dans le sujet.

Soit  $T_n$  un estimateur sans biais de  $\theta$  vérifiant les hypothèses annoncées. L'identité de I.5 et l'absence de biais donnent  $R(T_n, \theta) = V_\theta(T_n)$ . La borne admise entraîne alors

$$R(T_n, \theta) \geq \frac{\theta}{n}.$$

D'après IV.B.1,  $R(\bar{X}_n, \theta) = V(\bar{X}_n) = \theta/n$ . La moyenne empirique atteint donc, pour chaque  $\theta > 0$ , le plus petit risque dans la classe précisée des estimateurs sans biais. Cela ne constitue pas une comparaison avec tous les estimateurs biaisés.

## IV.B.3 On fixe $\theta > 0$ et on fait tendre $n$ vers l'infini. Par III.A.3, $I_{X_1}(\theta) = 1/\theta$ . De plus, $g'(\theta) = -e^{-\theta}$ . Il en résulte

$$\frac{(g'(\theta))^2}{nI_{X_1}(\theta)} = \frac{\theta e^{-2\theta}}{n}.$$

Par II.7,

$$\frac{V(\varphi(S_n))}{\theta e^{-2\theta}/n} = \frac{e^{\theta/n} - 1}{\theta/n}.$$

La dérivabilité de l'exponentielle en 0 donne  $\lim_{u \rightarrow 0} (e^u - 1)/u = 1$ . Comme  $\theta/n \rightarrow 0$ , le quotient précédent tend vers 1. Les deux quantités comparées sont strictement positives, donc

$$V(\varphi(S_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(g'(\theta))^2}{nI_{X_1}(\theta)}.$$

IV.B.4 L'estimateur  $U_n = \varphi(S_n)$  est sans biais d'après II.6 et borné par 1, donc il satisfait les hypothèses de la seconde borne admise. Cette borne s'applique aussi à tout autre estimateur sans biais de  $e^{-\theta}$  dans la classe considérée : son risque est au moins

$$b_n(\theta) = \frac{\theta e^{-2\theta}}{n}.$$

Or le risque de  $U_n$  est sa variance et vérifie  $R(U_n, e^{-\theta})/b_n(\theta) \rightarrow 1$  pour chaque  $\theta > 0$  fixé, d'après IV.B.3. Son risque atteint donc asymptotiquement, au premier ordre, cette borne inférieure de la classe des estimateurs sans biais.

Plus précisément, pour toute suite concurrente  $T_n$  sans biais et satisfaisant les hypothèses, la borne donne

$$\frac{R(T_n, e^{-\theta})}{R(U_n, e^{-\theta})} \geq \frac{b_n(\theta)}{R(U_n, e^{-\theta})},$$

dont le membre de droite tend vers 1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , le rapport de risques est donc au moins  $1 - \varepsilon$  à partir d'un rang assez grand. La conclusion est ponctuelle en  $\theta$ , sans affirmation d'uniformité sur tous les paramètres.

IV.B.5 Non. La borne admise ne concerne que les estimateurs sans biais. La partie I montre qu'un estimateur biaisé peut avoir un risque inférieur à celui d'un estimateur sans biais. En outre, une équivalence asymptotique ne prouve pas une minimisation exacte pour un entier  $n$  donné.

On peut ici rendre cette réserve explicite sans utiliser le paramètre inconnu dans la formule d'un estimateur. Posons  $a_n = e^{-1/n}$ , coefficient connu, et considérons l'estimateur biaisé  $a_n U_n$ , où  $U_n = \varphi(S_n)$ . Avec  $p = e^{-\theta}$  et  $v = V_\theta(U_n)$ , l'identité du risque donne

$$R(a_n U_n, p) = a_n^2 v + (1 - a_n)^2 p^2.$$

Évaluons ces risques au paramètre admissible  $\theta = 1$ . On a alors  $p = e^{-1}$  et  $v = p^2(e^{1/n} - 1)$ . En substituant  $a_n = e^{-1/n}$ ,

$$R(a_n U_n, p) = p^2 (e^{-2/n}(e^{1/n} - 1) + (1 - e^{-1/n})^2) = p^2(1 - e^{-1/n}).$$

En revanche,  $R(U_n, p) = p^2(e^{1/n} - 1)$ . Comme

$$1 - e^{-1/n} = e^{-1/n}(e^{1/n} - 1) < e^{1/n} - 1,$$

l'estimateur biaisé a un risque strictement inférieur au paramètre  $\theta = 1$ , pour tout entier  $n \geq 2$ , aussi grand soit-il. Son coefficient est connu à l'avance ; l'évaluation à  $\theta = 1$  ne sert qu'à comparer les performances. On ne prétend pas qu'il améliore le risque pour tous les autres paramètres.

Ainsi, l'optimalité asymptotique au premier ordre dans la classe sans biais ne permet pas de conclure à une optimalité exacte parmi tous les estimateurs.

## Relevé des adaptations

---

I.3 et I.5 : la définition de l'absence de biais est fournie ; le risque quadratique est défini pour les estimateurs ayant un moment d'ordre deux. La formule de décomposition est demandée comme une identité à démontrer, sans la présenter comme une connaissance de cours d'estimation.

II.8 a) : l'inégalité des accroissements finis remplace l'égalité des accroissements finis, sans changer l'encadrement demandé. Les étapes suivantes restent inchangées.

III.A, préambule : positivité des probabilités et support commun explicités pour rendre les logarithmes bien définis ; dérivation à observation fixée précisée. Les calculs de la quantité définie dans le sujet sont conservés.

IV.A, préambule et IV.A.3 : probabilités strictement positives et de classe  $C^2$  sur un intervalle ouvert, afin de justifier les dérivées secondes de logarithmes. La dérivation porte explicitement sur une somme finie avec ses probabilités dépendant du paramètre. Toutes les questions de la démonstration sont conservées.

IV.B, préambule et IV.B.2 : le théorème général admis d'origine est remplacé par ses deux seules bornes particulières utiles pour l'échantillon de Poisson et les cibles  $\theta$  et  $e^{-\theta}$ . Les hypothèses sur les estimateurs sont précisées ; les conclusions d'optimalité restent limitées à la classe sans biais et, en IV.B.4, au premier ordre pour chaque paramètre fixé.