



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2007

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le problème comporte quatre parties. La partie II est indépendante de la partie I. La partie III fait appel aux parties I et II seulement dans ses deux dernières questions. La partie IV fait appel à la partie I uniquement dans sa dernière question.

Tout au long du sujet, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires utilisées. Sous réserve d'existence, l'espérance d'une variable aléatoire réelle X est notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

Rappel : si $Z_1, \dots, Z_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de lois de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1, \dots, \theta_n > 0$, alors

$$\sum_{i=1}^n Z_i$$

suit la loi de Poisson de paramètre

$$\sum_{i=1}^n \theta_i.$$

Ce résultat pourra être utilisé sans démonstration.

Partie I : Modélisation poissonnienne

On considère une société d'assurance comptant $N \geq 1$ clients et garantissant à chacun d'entre eux un capital de $s > 0$ euros en cas de décès. On suppose que le nombre de décès annuel suit une loi de Poisson de paramètre entier $k \geq 1$. Le revenu annuel de la société fourni par la perception des primes des N clients est au total $ks(1 + \lambda)$ euros, où $\lambda > 0$ représente le taux de sécurité que la société s'accorde pour faire face à un nombre de sinistres plus élevé que la moyenne. La société dispose également d'un fonds de réserve $R \geq 0$ dans lequel elle peut puiser exceptionnellement. Un bilan financier est effectué tous les cinq ans. On note Y le nombre de décès enregistrés sur une période de cinq ans.

A. Résultats généraux

I.A.1. Donner en fonction de s et de Y la somme totale due par la société aux clients au moment du bilan financier au bout de cinq ans.

I.A.2. Dans quelles circonstances peut-on considérer que Y suit une loi de Poisson de paramètre $5k$?

On supposera dorénavant que Y suit une loi de Poisson de paramètre $5k$.

I.A.3. Rappeler sans démonstration $E(Y)$ et $V(Y)$.

I.A.4. Justifier l'existence et l'unicité d'un réel strictement positif t_0 tel que

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx = 0,99.$$

I.A.5. Justifier le résultat limite suivant :

$$P(Y - 5k > t_0 \sqrt{5k}) \rightarrow 0,01 \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

On pourra représenter une variable de loi de Poisson de paramètre $5k$ comme la somme de k variables indépendantes de loi de Poisson de paramètre 5, puis appliquer le théorème limite central.

Pour la fin de cette partie, on supposera k assez grand pour utiliser l'approximation

$$P(Y - 5k > t_0 \sqrt{5k}) \simeq 0,01. \quad (\text{A})$$

B. Exemples d'application

Dans cette partie, il s'agit d'exploiter l'approximation (A).

I.B.1. Expliquer pourquoi la société peut faire face à toutes les indemnisations requises sur l'exercice de cinq ans si et seulement si

$$5sk(1 + \lambda) + R \geq sY.$$

I.B.2. Quelle réserve R faut-il prévoir pour que la probabilité que la société puisse faire face à toutes les indemnisations requises sur l'exercice de cinq ans soit voisine de 99 % ? Exprimer R en fonction de s , k , λ et t_0 . Tenir compte de la contrainte $R \geq 0$ et distinguer le cas où aucune réserve n'est nécessaire pour atteindre au moins ce niveau approximatif de sécurité.

I.B.3. On note dorénavant $\mu = k/N$ le taux de mortalité dans l'ensemble des clients. Combien de clients N la société devrait-elle compter pour pouvoir se dispenser d'un fonds de réserve pendant un exercice de cinq ans tout en maintenant à plus de 99 % la probabilité de pouvoir faire face au paiement de toutes les indemnisations requises, dans l'approximation retenue ? Exprimer la condition sur N en fonction de λ , t_0 et μ .

Partie II : Médianes

Soit X une variable aléatoire réelle. On définit l'ensemble

$$\mathcal{M}(X) = \{m \in \mathbb{R} \mid P(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m)\}.$$

Un élément de $\mathcal{M}(X)$ est appelé médiane de X .

II.1. Soit X une variable aléatoire réelle. Rappeler la définition de la fonction de répartition F associée à X .

II.2. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Calculer $P(X < m)$ et $P(X \leq m)$ dans les cas suivants : $m < 0$, $m = 0$, $m \in]0, 1[$, $m = 1$ et $m > 1$. En déduire $\mathcal{M}(X)$.

II.3. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ et de fonction de répartition F_X . Justifier que

$$m \in \mathcal{M}(X) \iff m \geq 0 \text{ et } F_X(m) = \frac{1}{2},$$

puis déterminer $\mathcal{M}(X)$.

On revient au cadre général où X est une variable aléatoire réelle.

II.4. Soient $a \in \mathcal{M}(X)$ et $b \in \mathcal{M}(X)$, avec $a \leq b$. Montrer que, si $c \in [a, b]$, alors $c \in \mathcal{M}(X)$. On a ainsi démontré que $\mathcal{M}(X)$ est un intervalle.

II.5. Supposons que X possède une densité f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0$ pour tout réel x . Montrer, en utilisant avec soin le théorème de la bijection, que dans ce cas $\mathcal{M}(X)$ est réduit à un réel; déterminer ensuite $\mathcal{M}(X)$ lorsque X suit la loi normale centrée réduite.

II.6. En supposant que X admette une espérance, est-il exact que $E(X) \in \mathcal{M}(X)$?

Partie III : Médiane d'une variable poissonnienne

A. Préliminaires d'analyse

Il s'agit d'étudier la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \exp(-n) \frac{n^n}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

III.A.1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4}.$$

III.A.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right).$$

III.A.3. Dédurre des deux questions précédentes la nature de la série de terme général $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$.

III.A.4. Conclure sur la limite de $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$, puis sur celle de $(u_n)_{n \geq 1}$.

B. Probabilités

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la fonction définie, pour tout réel λ , par

$$P_n(\lambda) = \exp(-\lambda) \sum_{j=0}^n \frac{\lambda^j}{j!} = \exp(-\lambda) \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} \right).$$

III.B.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel λ ,

$$P_n''(\lambda) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{n-1}}{n!} (\lambda - n),$$

où P_n'' désigne la dérivée seconde de P_n .

III.B.2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(n-1) + P_n'(n-1) = P_{n-1}(n-1),$$

où P_n' désigne la dérivée de P_n .

III.B.3. Soit $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

III.B.3.(i). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(n) = Q(n-1) + Q'(n-1) + \int_{n-1}^n (n-t)Q''(t) dt. \quad (\text{E})$$

III.B.3.(ii). En appliquant (E) à $Q = P_n$, démontrer que la suite $(P_n(n))_{n \geq 1}$ est décroissante.

III.B.3.(iii). En appliquant (E) à $Q = P_{n-1}$, démontrer que la suite $(P_{n-1}(n))_{n \geq 1}$ est croissante.

III.B.4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(n) - P_{n-1}(n) = u_n,$$

où (u_n) est définie dans la partie III.A. En déduire que les suites $(P_n(n))_{n \geq 1}$ et $(P_{n-1}(n))_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

On considère dorénavant, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire réelle Z de loi de Poisson de paramètre n .

III.B.5. Montrer que

$$P_n(n) = P\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right).$$

En déduire que $(P_n(n))_{n \geq 1}$ converge vers $1/2$. On pourra représenter la loi de Z comme celle de la somme de n variables indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1, puis

appliquer le théorème limite central.

III.B.6. Montrer que $(P_{n-1}(n))_{n \geq 1}$ converge et donner sa limite.

III.B.7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{n-1}(n) \leq \frac{1}{2} \leq P_n(n).$$

III.B.8. En déduire que $n \in \mathcal{M}(Z)$, où $\mathcal{M}(Z)$ est défini dans la partie II.

III.B.9. On admet finalement que $\mathcal{M}(Z) = \{n\}$. À la lumière de ce résultat, que penser de la stratégie « génèreuse » consistant à choisir $\lambda = 0$ dans la modélisation de la partie I?

Partie IV : Inégalité maximale de Lévy

Soit J un entier strictement supérieur à 1. On considère J variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_J$. On suppose que, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, X_j suit une loi de Poisson de paramètre entier non nul k , et l'on définit $Y_j = X_j - k$. On pose enfin, pour $1 \leq i \leq J$,

$$S_i = \sum_{j=1}^i Y_j.$$

IV.1. En utilisant le résultat de III.B.8, vérifier que, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$, 0 est une médiane de $S_J - S_i$.

Soit x un réel positif. On considère

$$\Omega_0 = \left\{ \max_{1 \leq j \leq J} S_j \leq x \right\} \quad \text{et} \quad \Omega_1 = \{S_1 > x\}.$$

Pour tout entier i tel que $2 \leq i \leq J$, on note

$$\Omega_i = \left\{ \max_{1 \leq j < i} S_j \leq x \right\} \cap \{S_i > x\}.$$

IV.2. Montrer que $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_J$ constituent un système complet d'événements.

IV.3. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$, démontrer l'inclusion

$$\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i \subset \{S_J > x\} \cap \Omega_i.$$

IV.4. Montrer que

$$P(S_J > x) \geq \sum_{i=1}^J P(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i).$$

IV.5. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$, que peut-on dire des événements $\{S_J - S_i \geq 0\}$ et Ω_i ?

IV.6. Dédurre de IV.1, IV.4 et IV.5 l'inégalité

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq J} S_j > x\right) \leq 2P(S_J > x).$$

Reprenons la modélisation de la partie I. La valeur k , supposée connue et constante, doit en réalité être estimée par la compagnie d'assurance à partir de son expérience passée. Elle est donc entachée d'incertitude et susceptible d'augmenter avec le vieillissement des clients. Il est utile d'observer, année après année, le nombre de décès effectifs et de disposer d'un moyen de décider si ce nombre connaît une dérive « anormale », afin de pouvoir agir, par exemple en augmentant le montant de la prime d'assurance. Notons X_i le nombre de décès observés pendant la i -ième année d'un exercice de cinq ans. On observe chaque année j la valeur prise par S_j .

IV.7. On suppose $k = 10$. Que penser si l'on constate, après la quatrième année d'exercice, que $\max_{1 \leq j \leq 4} S_j$ prend la valeur 15 ?

On pourra utiliser $P(T > 2) \leq 2,5 \%$ si T suit la loi normale centrée réduite. Pour distinguer une approximation normale d'une garantie exacte dans le modèle de Poisson, on donne aussi le résultat numérique particulier suivant : si U suit la loi de Poisson de paramètre 40, alors $P(U \geq 55) < 0,015$.