



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2007

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : Modélisation poissonnienne

A. Résultats généraux

I.A.1. Chaque décès entraîne le paiement de s euros. Pour Y décès, la somme totale due est donc sY euros. Il s'agit d'une variable aléatoire, puisque le nombre de décès n'est pas connu à l'avance.

I.A.2. Notons D_i le nombre de décès pendant l'année i , pour $1 \leq i \leq 5$. Une hypothèse suffisante est que $D_1, \dots, D_5$ soient mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Poisson de paramètre k . Alors $Y = D_1 + \dots + D_5$ et la stabilité rappelée dans le sujet donne $Y \sim \mathcal{P}(5k)$.

L'hypothèse de loi annuelle ne suffit pas à elle seule : il faut aussi un modèle des dépendances entre les années. L'indépendance et la constance du paramètre sont les circonstances retenues ici pour justifier cette modélisation.

I.A.3. Une variable de loi de Poisson possède une espérance et une variance égales à son paramètre. Par conséquent,

$$E(Y) = 5k \quad \text{et} \quad V(Y) = 5k.$$

I.A.4. Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable et de dérivée $\Phi'(t) = e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi} > 0$. Elle est donc strictement croissante. De plus, ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ valent respectivement 0 et 1.

Le théorème de la bijection assure ainsi qu'il existe un unique $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t_0) = 0,99$. Comme $\Phi(0) = 1/2 < 0,99$, la stricte croissance impose $t_0 > 0$. C'est exactement l'existence et l'unicité demandées.

I.A.5. Question adaptée au programme actuel : l'indication de décomposition rend explicite l'application du théorème limite central à une loi de Poisson de paramètre croissant.

Considérons une suite $(W_i)_{i \geq 1}$ de variables indépendantes de même loi $\mathcal{P}(5)$. Chacune

possède une espérance 5 et une variance $5 > 0$. Le théorème limite central donne

$$\frac{W_1 + \dots + W_k - 5k}{\sqrt{5k}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Par stabilité des lois de Poisson indépendantes, $W_1 + \dots + W_k$ a la même loi que Y . La fonction Φ étant continue en t_0 , la définition de la convergence en loi donne

$$P\left(\frac{Y - 5k}{\sqrt{5k}} \leq t_0\right) \rightarrow \Phi(t_0) = 0,99.$$

En passant aux événements complémentaires, on obtient

$$P(Y - 5k > t_0 \sqrt{5k}) \rightarrow 0,01.$$

Il s'agit d'une limite lorsque k augmente; pour un k fixé, la valeur 0,01 est une approximation et non une probabilité exacte.

B. Exemples d'application

I.B.1. Sur cinq ans, la société perçoit $5ks(1 + \lambda)$ euros de primes. En ajoutant la réserve mobilisable R , elle dispose de $5ks(1 + \lambda) + R$ euros. Sa dette totale est sY d'après I.A.1.

Elle peut payer tous les sinistres si et seulement si ses ressources sont au moins égales à cette dette, soit

$$5ks(1 + \lambda) + R \geq sY.$$

Comme $s > 0$, cette condition équivaut à $Y - 5k \leq 5k\lambda + R/s$.

I.B.2. Question adaptée au programme actuel : la contrainte de non-négativité de la réserve est prise en compte explicitement.

L'approximation (A) donne une probabilité de solvabilité voisine de 0,99 si l'on place le seuil de l'événement précédent à $t_0\sqrt{5k}$. L'équation à résoudre est donc

$$5k\lambda + \frac{R}{s} = t_0\sqrt{5k}.$$

Elle fournit la valeur algébrique

$$R_0 = s \left(t_0\sqrt{5k} - 5k\lambda \right).$$

Si $t_0\sqrt{5k} \geq 5k\lambda$, alors $R_0 \geq 0$ et le choix $R = R_0$ donne le niveau de sécurité approximatif demandé. À l'égalité, la réserve requise est nulle.

Si $t_0\sqrt{5k} < 5k\lambda$, la marge incluse dans les primes dépasse déjà le seuil de sécurité. Une réserve négative n'est pas autorisée ; le choix $R = 0$ conduit alors à un niveau de sécurité supérieur à 0,99 dans l'approximation normale. Aucune réserve positive ne permet de ramener exactement ce niveau à 0,99, puisqu'elle ne peut qu'augmenter la probabilité de solvabilité.

La réserve minimale non négative visant au moins le niveau approximatif de 99 % est ainsi

$$R_{\min} = s \max \left(0, t_0\sqrt{5k} - 5k\lambda \right).$$

I.B.3. Sans réserve, l'événement de solvabilité est $Y - 5k \leq 5k\lambda$. Dans l'approximation normale, sa probabilité vaut approximativement $\Phi(\lambda\sqrt{5k})$.

La fonction Φ est strictement croissante et $\Phi(t_0) = 0,99$. Pour obtenir une probabilité

strictement supérieure à 0,99 dans ce calcul approché, on demande donc

$$\lambda\sqrt{5k} > t_0.$$

Les deux membres sont strictement positifs ; on peut les élever au carré sans changer le sens de l'inégalité. Comme $k = \mu N$ et $\mu = k/N > 0$, il vient

$$5\lambda^2\mu N > t_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad N > \frac{t_0^2}{5\mu\lambda^2}.$$

Si l'on cherche un nombre entier de clients et que l'on ignore les contraintes supplémentaires d'intégralité du paramètre k , le plus petit entier satisfaisant cette condition est

$$\left\lceil \frac{t_0^2}{5\mu\lambda^2} \right\rceil + 1.$$

Dans le modèle où $k = \mu N$ doit lui-même rester entier, on retient le plus petit nombre de clients compatible avec cette contrainte et avec l'inégalité stricte. L'égalité au seuil correspond seulement à un niveau approximatif de 99 %. Ces conditions restent liées à l'approximation normale ; elles ne certifient pas une probabilité exacte pour un petit k .

Partie II : Médianes

II.1. La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F(x) = P(X \leq x).$$

II.2. La variable X prend les valeurs 0 et 1, chacune avec probabilité 1/2. Le tableau suivant distingue les inégalités stricte et large aux deux valeurs prises par X .

Valeur de m	$P(X < m)$	$P(X \leq m)$
$m < 0$	0	0
$m = 0$	0	1/2
$0 < m < 1$	1/2	1/2
$m = 1$	1/2	1
$m > 1$	1	1

Pour $m < 0$, la condition $1/2 \leq P(X \leq m)$ échoue. Pour $m > 1$, la condition $P(X < m) \leq 1/2$ échoue. Toutes les conditions sont satisfaites pour $m = 0$, pour $0 < m < 1$ et pour $m = 1$. Ainsi,

$$\mathcal{M}(X) = [0, 1].$$

II.3. La fonction de répartition de la loi exponentielle est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Cette loi est à densité, donc elle n'a pas d'atome : pour tout m , $P(X < m) = P(X \leq m) = F_X(m)$. Les deux inégalités définissant une médiane équivalent donc à $F_X(m) = 1/2$. Pour $m < 0$, on a $F_X(m) = 0$, ce qui est impossible ; on obtient bien l'équivalence annoncée avec $m \geq 0$.

Sur ce dernier domaine,

$$F_X(m) = \frac{1}{2} \iff e^{-\alpha m} = \frac{1}{2} \iff m = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Comme $\alpha > 0$ et $\ln 2 > 0$, cette valeur est admissible. Par conséquent,

$$\mathcal{M}(X) = \left\{ \frac{\ln 2}{\alpha} \right\}.$$

II.4. Soit $c \in [a, b]$. L'inclusion $\{X < c\} \subset \{X < b\}$ donne

$$P(X < c) \leq P(X < b) \leq \frac{1}{2},$$

la dernière inégalité venant de $b \in \mathcal{M}(X)$. De même, $\{X \leq a\} \subset \{X \leq c\}$ donne

$$P(X \leq c) \geq P(X \leq a) \geq \frac{1}{2},$$

car $a \in \mathcal{M}(X)$. Les deux conditions sont réunies : $c \in \mathcal{M}(X)$. L'ensemble des médianes est donc un intervalle, au sens où il contient tout le segment joignant deux de ses éléments.

II.5. Puisque f est continue, la fonction de répartition F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. L'hypothèse $f(x) > 0$ pour tout x assure la stricte croissance de F . Ses limites sont 0 et 1 aux deux infinis. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Il existe ainsi un unique réel m tel que $F(m) = 1/2$. La loi étant à densité, elle ne possède aucun atome ; comme en II.3, les conditions de médiane sont exactement $F(m) = 1/2$. Par conséquent, $\mathcal{M}(X) = \{m\}$.

Pour la loi normale centrée réduite, la densité $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, $\Phi(0) = 1/2$. Le résultat précédent donne donc $\mathcal{M}(X) = \{0\}$.

II.6. L'affirmation est fausse. Prenons une variable de loi exponentielle de paramètre 1. Elle possède une espérance $E(X) = 1$, alors que II.3 donne $\mathcal{M}(X) = \{\ln 2\}$. Comme $\ln 2 < 1$, son espérance n'est pas une médiane.

Cet exemple distingue la moyenne, définie par une espérance, de la médiane, définie par le partage des probabilités de part et d'autre d'un seuil.

Partie III : Médiane d'une variable poissonnienne

A. Préliminaires d'analyse

III.A.1. Méthode 1 — Étude de la différence

La fonction $g(x) = x - x^2/4 - \ln(1+x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et vérifie

$$g'(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}.$$

Sur $[0, 1]$, le dénominateur est strictement positif et le numérateur est positif ou nul. Ainsi $g' \geq 0$ et g est croissante. Comme $g(0) = 0$, on obtient $g(x) \geq 0$, soit l'inégalité demandée.

Méthode 2 — Comparaison sous une intégrale

Pour $t \in [0, 1]$,

$$1 - \frac{t}{2} - \frac{1}{1+t} = \frac{t(1-t)}{2(1+t)} \geq 0.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, on peut donc intégrer sur $[0, x]$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt = x - \frac{x^2}{4}.$$

La première méthode étudie directement l'écart entre les deux fonctions ; la seconde construit la majoration du logarithme à partir d'une majoration de son intégrande.

III.A.2. Les nombres u_n sont strictement positifs. Leur quotient est donc défini et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-(n+1)}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^{-n}n^n} = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La base $1 + 1/n$ étant positive, la dernière expression s'écrit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right).$$

III.A.3. Pour $n \geq 1$, on a $1/n \in [0, 1]$. La question III.A.1 entraîne

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \leq -\frac{1}{4n}.$$

En prenant le logarithme de l'identité de III.A.2, il vient

$$\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) \geq \frac{1}{4n} > 0.$$

La série étudiée est donc à termes positifs. La série harmonique

$$\sum_{n \geq 1} 1/n$$

diverge, et la comparaison précédente montre que

$$\sum_{n \geq 1} (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$$

diverge vers $+\infty$.

III.A.4. Pour tout $m \geq 1$, la somme partielle est télescopique :

$$\sum_{n=1}^m (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})) = \ln(u_1) - \ln(u_{m+1}).$$

Le membre de gauche tend vers $+\infty$ par III.A.3; $\ln(u_1)$ est une constante réelle. Ainsi $\ln(u_{m+1}) \rightarrow -\infty$, donc $\ln(u_n) \rightarrow -\infty$. Comme l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$ et $u_n = e^{\ln(u_n)}$, on conclut que $u_n \rightarrow 0$.

B. Probabilités

III.B.1. La fonction P_n est le produit de l'exponentielle $e^{-\lambda}$ et d'un polynôme; elle est donc de classe C^∞ , en particulier C^2 , sur $\mathbb{R}$. La somme à dériver étant finie,

$$P'_n(\lambda) = -e^{-\lambda} \sum_{j=0}^n \frac{\lambda^j}{j!} + e^{-\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = -e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Une seconde dérivation donne, pour $n \geq 1$,

$$P''_n(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} - e^{-\lambda} \frac{n\lambda^{n-1}}{n!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{n!} (\lambda - n).$$

Cette identité est valable pour tout réel λ , y compris $\lambda = 0$, avec la convention usuelle $\lambda^0 = 1$.

III.B.2. Question adaptée au programme actuel : la désignation erronée « polynôme dérivé » est rectifiée en « dérivée ».

La formule précédente de la dérivée montre en réalité que, pour tout réel λ ,

$$P_n(\lambda) + P'_n(\lambda) = e^{-\lambda} \left(\sum_{j=0}^n \frac{\lambda^j}{j!} - \frac{\lambda^n}{n!} \right) = P_{n-1}(\lambda).$$

En choisissant $\lambda = n - 1$, on obtient exactement $P_n(n - 1) + P'_n(n - 1) = P_{n-1}(n - 1)$. Le cas $n = 1$ est inclus : les deux membres valent 1 à $\lambda = 0$.

Le terme « polynôme dérivé » employé dans le texte source est rectifié : P'_n est la dérivée d'une fonction qui n'est pas un polynôme.

III.B.3.(i). Toutes les fonctions intégrées sont continues sur le segment $[n - 1, n]$. Une intégration par parties, avec les fonctions $t \mapsto n - t$ et Q' , donne

$$\int_{n-1}^n (n - t)Q''(t) dt = [(n - t)Q'(t)]_{n-1}^n + \int_{n-1}^n Q'(t) dt.$$

Le terme de bord vaut $-Q'(n - 1)$ et la dernière intégrale vaut $Q(n) - Q(n - 1)$. On obtient donc

$$\int_{n-1}^n (n - t)Q''(t) dt = -Q'(n - 1) + Q(n) - Q(n - 1).$$

En isolant $Q(n)$, on retrouve (E). Il s'agit d'une identité particulière démontrée sur un segment ; aucun résultat général de développement à reste intégral n'est nécessaire.

III.B.3.(ii). Pour comparer deux termes successifs de la suite, prenons $n \geq 2$. Appliquons (E) à $Q = P_n$, puis utilisons III.B.2 :

$$P_n(n) = P_{n-1}(n - 1) + \int_{n-1}^n (n - t)P''_n(t) dt.$$

Sur ce segment, $n - t \geq 0$, tandis que $P''_n(t) = e^{-t}t^{n-1}(t - n)/n! \leq 0$. L'intégrale est donc négative ou nulle. On conclut que $P_n(n) \leq P_{n-1}(n - 1)$ pour tout $n \geq 2$: la suite $(P_n(n))_{n \geq 1}$ est décroissante.

L'intégrande est même strictement négatif sur l'intervalle ouvert $]n-1, n[$; la décroissance est donc stricte.

III.B.3.(iii). Prenons encore $n \geq 2$, de sorte que la formule de III.B.1 s'applique à P_{n-1} . L'identité (E) et la relation générale démontrée en III.B.2 donnent

$$P_{n-1}(n) = P_{n-2}(n-1) + \int_{n-1}^n (n-t)P_{n-1}''(t) dt.$$

Pour $t \in [n-1, n]$,

$$P_{n-1}''(t) = e^{-t} \frac{t^{n-2}}{(n-1)!} (t - (n-1)) \geq 0.$$

L'intégrale est donc positive ou nulle et $P_{n-1}(n) \geq P_{n-2}(n-1)$. Ce sont les termes de rangs n et $n-1$ de la suite étudiée, qui est donc croissante dès son premier rang 1.

L'intégrande est strictement positif sur $]n-1, n[$, ce qui donne même une croissance stricte.

III.B.4. En retranchant les deux sommes finies, tous les termes s'annulent sauf celui d'indice n :

$$P_n(n) - P_{n-1}(n) = e^{-n} \frac{n^n}{n!} = u_n.$$

Posons $a_n = P_n(n)$ et $b_n = P_{n-1}(n)$. D'après III.B.3, (a_n) est décroissante et (b_n) croissante. De plus, $a_n - b_n = u_n > 0$ et cette différence tend vers 0 d'après III.A.4. Les deux suites sont donc adjacentes; elles convergent vers une même limite réelle. Elles sont en particulier bornées : $b_1 \leq b_n \leq a_n \leq a_1$.

III.B.5. Question adaptée au programme actuel : la décomposition indiquée dans le sujet permet de justifier explicitement l'approximation normale.

Comme $Z \sim \mathcal{P}(n)$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$P_n(n) = e^{-n} \sum_{j=0}^n \frac{n^j}{j!} = P(Z \leq n) = P\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right),$$

où la dernière équivalence utilise $\sqrt{n} > 0$.

Considérons des variables $W_1, W_2, \dots$ indépendantes de même loi $\mathcal{P}(1)$. Chacune a une espérance et une variance égales à 1. Leur somme jusqu'au rang n suit la même loi que Z . Le théorème limite central donne donc la convergence en loi de $(Z - n)/\sqrt{n}$ vers la loi normale centrée réduite, au sens des lois lorsque n varie.

La fonction Φ étant continue en 0, on en déduit $P_n(n) \rightarrow \Phi(0) = 1/2$.

III.B.6. Méthode 1 — Utilisation des suites adjacentes

Les deux suites de III.B.4 ont la même limite. Puisque III.B.5 identifie celle de $(P_n(n))$ à $1/2$, la limite de $(P_{n-1}(n))$ vaut également $1/2$.

Méthode 2 — Soustraction d'une probabilité ponctuelle

L'identité de III.B.4 donne $P_{n-1}(n) = P_n(n) - u_n$. Or $P_n(n) \rightarrow 1/2$ par III.B.5 et $u_n \rightarrow 0$ par III.A.4. Les règles de calcul sur les limites de suites réelles donnent donc directement $P_{n-1}(n) \rightarrow 1/2$.

La première méthode utilise l'encadrement global fourni par l'adjacence ; la seconde identifie l'écart à la probabilité ponctuelle $P(Z = n)$, qui devient négligeable.

III.B.7. Une suite décroissante convergeant vers $1/2$ a tous ses termes supérieurs ou

égaux à $1/2$. En effet, chaque terme majore tous les suivants et donc leur limite. Ainsi $P_n(n) \geq 1/2$.

De même, une suite croissante convergeant vers $1/2$ a tous ses termes inférieurs ou égaux à $1/2$. On obtient $P_{n-1}(n) \leq 1/2$. En réunissant les deux résultats,

$$P_{n-1}(n) \leq \frac{1}{2} \leq P_n(n).$$

III.B.8. Puisque Z est à valeurs entières,

$$P(Z < n) = P(Z \leq n-1) = P_{n-1}(n) \quad \text{et} \quad P(Z \leq n) = P_n(n).$$

L'encadrement de III.B.7 est donc exactement $P(Z < n) \leq 1/2 \leq P(Z \leq n)$. Selon la définition de la partie II, cela signifie que $n \in \mathcal{M}(Z)$.

III.B.9. Résultat admis dans cette version adaptée : pour $Z \sim \mathcal{P}(n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des médianes est $\mathcal{M}(Z) = \{n\}$. Cette admission figure déjà dans l'énoncé original. Elle précise l'unicité de la médiane obtenue en III.B.8 et motive l'interprétation du risque d'assurance.

Dans la partie I, $Y \sim \mathcal{P}(5k)$, donc son unique médiane est $5k$. Si $\lambda = 0$ et si la société ne dispose d'aucune réserve, sa solvabilité correspond à $Y \leq 5k$. Sa probabilité est $P_{5k}(5k)$, qui tend vers $1/2$ lorsque k augmente. En fait, les décroissances strictes démontrées en III.B.3 donnent $P_{5k}(5k) > 1/2$, mais cette différence ne procure pas une sécurité voisine de 99 % lorsque k est grand.

Ainsi, des primes limitées au coût moyen, sans réserve, laissent un risque de défaut voisin d'une chance sur deux : cette stratégie est inadaptée à l'objectif de sécurité fixé en partie I.

Il faut distinguer la suppression de la marge de celle de la réserve. Avec $\lambda = 0$, une réserve peut toujours apporter la sécurité recherchée ; I.B.2 donne alors $R \simeq st_0 \sqrt{5k}$ pour un niveau approximatif de 99 %. L'admission sur la médiane ne permet donc pas d'affirmer qu'une marge nulle serait dangereuse indépendamment du montant de la réserve.

Partie IV : Inégalité maximale de Lévy

IV.1. Si $1 \leq i < J$, alors

$$S_J - S_i = \sum_{j=i+1}^J X_j - (J - i)k.$$

Les X_j concernés étant indépendants de loi $\mathcal{P}(k)$, leur somme U_i suit la loi $\mathcal{P}((J - i)k)$. Le paramètre $(J - i)k$ est un entier strictement positif. D'après III.B.8, il est une médiane de U_i , soit

$$P(U_i < (J - i)k) \leq \frac{1}{2} \leq P(U_i \leq (J - i)k).$$

En soustrayant $(J - i)k$ dans les événements, on obtient

$$P(S_J - S_i < 0) \leq 1/2 \leq P(S_J - S_i \leq 0) : 0 \text{ est donc une médiane de } S_J - S_i.$$

Si $i = J$, la différence $S_J - S_i$ est constante égale à 0. Elle vérifie $P(S_J - S_i < 0) = 0$ et $P(S_J - S_i \leq 0) = 1$, donc possède également 0 comme médiane. Ce cas ne nécessite pas de loi de Poisson de paramètre nul.

IV.2. Pour chaque issue ω , deux situations sont possibles. Si aucun des nombres $S_1(\omega), \dots, S_J(\omega)$ ne dépasse strictement x , alors $\omega \in \Omega_0$. Sinon, il existe un premier indice i pour lequel $S_i(\omega) > x$. Les valeurs antérieures sont toutes inférieures ou égales à x ; par définition, $\omega \in \Omega_i$.

Ainsi $\Omega_0 \cup \dots \cup \Omega_J = \Omega$. L'événement Ω_0 est incompatible avec tout franchissement. Deux événements Ω_i et Ω_j d'indices distincts et positifs sont également incompatibles, puisque le premier indice de franchissement est unique. Ces événements sont donc deux à deux disjoints et forment un système complet.

IV.3. Soit $\omega \in \{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i$. Puisque $\omega \in \Omega_i$ avec $i \geq 1$, on a $S_i(\omega) > x$. De plus, $S_J(\omega) - S_i(\omega) \geq 0$. Par addition,

$$S_J(\omega) = S_i(\omega) + S_J(\omega) - S_i(\omega) \geq S_i(\omega) > x.$$

L'issue appartient donc à $\{S_J > x\} \cap \Omega_i$, ce qui prouve l'inclusion.

IV.4. Le système complet de IV.2 donne, par additivité sur des événements disjoints,

$$P(S_J > x) = \sum_{i=0}^J P(\{S_J > x\} \cap \Omega_i).$$

Le terme d'indice 0 est nul, puisque $S_J \leq x$ sur Ω_0 . Pour chaque $i \geq 1$, IV.3 et la croissance de la probabilité donnent

$$P(\{S_J > x\} \cap \Omega_i) \geq P(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i).$$

En sommant ces inégalités, on obtient la majoration inférieure annoncée pour $P(S_J > x)$.

IV.5. Pour $i < J$, l'événement Ω_i est déterminé par $X_1, \dots, X_i$, puisque les sommes partielles jusqu'à i ne font intervenir que ces variables. L'événement $\{S_J - S_i \geq 0\}$ est déterminé par $X_{i+1}, \dots, X_J$.

Les deux groupes sont disjoints et les variables $X_1, \dots, X_J$ sont mutuellement indépendantes. Le lemme des coalitions assure donc l'indépendance des deux événements, et

$$P(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i) = P(S_J - S_i \geq 0)P(\Omega_i).$$

Pour $i = J$, l'événement $\{S_J - S_i \geq 0\}$ est l'événement certain. Il est indépendant de tout événement et l'identité reste valable. Aucun conditionnement par Ω_i n'est nécessaire, même si sa probabilité était nulle.

IV.6. D'après IV.1, 0 est une médiane de $S_J - S_i$, donc

$$P(S_J - S_i \geq 0) = 1 - P(S_J - S_i < 0) \geq \frac{1}{2}.$$

En utilisant successivement IV.4 et IV.5, il vient

$$P(S_J > x) \geq \sum_{i=1}^J P(S_J - S_i \geq 0)P(\Omega_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J P(\Omega_i).$$

Par la description du premier franchissement, les événements $\Omega_1, \dots, \Omega_J$ sont disjoints et leur union est $\{\max_{1 \leq j \leq J} S_j > x\}$. On obtient donc

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq J} S_j > x\right) \leq 2P(S_J > x).$$

L'inégalité maximale est ici démontrée pour le modèle considéré ; elle n'est pas utilisée comme un théorème de cours supplémentaire.

IV.7. Question adaptée au programme actuel : une borne numérique particulière de Poisson permet de séparer une conclusion exacte de l'approximation normale proposée dans la source.

On évalue l'observation sous l'hypothèse où les quatre nombres annuels de décès sont indépendants et suivent tous la loi $\mathcal{P}(10)$. Posons $M_4 = \max_{1 \leq j \leq 4} S_j$. Chaque S_j est entier ; ainsi l'événement d'atteindre au moins le niveau observé est

$$\{M_4 \geq 15\} = \{M_4 > 14\}.$$

Il faut conserver cette distinction entre seuil strict et seuil large : l'événement $M_4 > 15$ ne contiendrait pas l'observation $M_4 = 15$.

Appliquons IV.6 à $J = 4$ et $x = 14$. La somme $U = X_1 + \dots + X_4$ suit la loi $\mathcal{P}(40)$ et $S_4 = U - 40$. Par conséquent,

$$P(M_4 \geq 15) \leq 2P(S_4 > 14) = 2P(U \geq 55) < 2 \times 0,015 = 0,03.$$

Ainsi, dans le modèle inchangé de paramètre 10, la probabilité de franchir ce niveau pendant les quatre premières années est strictement inférieure à 3 %. Le niveau observé fournit donc une alerte contre l'hypothèse de stabilité retenue. Cette conclusion est une majoration exacte utilisant le résultat particulier donné dans le sujet ; la queue de Poisson vaut approximativement 0,0140223, ce qui donne une majoration numérique plus précise d'environ 0,0280446.

L'indication normale d'origine apporte un éclairage approché : en représentant U comme une somme de 40 variables indépendantes de loi $\mathcal{P}(1)$, le théorème limite central motive l'approximation de $(U - 40)/\sqrt{40}$ par une normale centrée réduite. Comme $14/\sqrt{40} > 2$, cette approximation et $P(T > 2) \leq 0,025$ suggèrent une borne du risque maximal de l'ordre de 5 %. Pour le paramètre fixé 40, le théorème limite central ne donne toutefois pas à lui seul une borne sur l'erreur d'approximation ; la garantie exacte de moins de 3 % repose sur le calcul de Poisson précédent.

Une observation rare sous le modèle ne démontre pas que le paramètre a augmenté. Elle peut justifier une vérification des hypothèses, de l'estimation initiale et de la politique de primes. La probabilité calculée n'est pas une probabilité, après observation, que le paramètre soit resté égal à 10.

Relevé des adaptations

I.A.5 et III.B.5 : ajout d'une indication de décomposition en sommes de variables de Poisson indépendantes de paramètre fixe, pour justifier les applications du théorème limite central.

I.B.2 : explicitation de la contrainte $R \geq 0$ et du cas où la marge sur les primes suffit déjà à atteindre le niveau de sécurité approché. Les paramètres positifs nécessaires aux calculs sont explicités dans le préambule de I.

III.B.2 : la désignation inexacte « polynôme dérivé » est remplacée par « dérivée » ; P_n est le produit d'un polynôme par une exponentielle.

IV.7 : ajout de la seule borne particulière $P(U \geq 55) < 0,015$ pour $U \sim \mathcal{P}(40)$, afin de permettre une conclusion exacte dans le modèle. L'indication normale de l'original est

conservée et son statut approché est distingué. Le seuil observé est traité avec l'inégalité large appropriée aux valeurs entières.