



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2006

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les deux problèmes sont totalement indépendants. Le premier est consacré aux lois de probabilité et aux variables aléatoires discrètes. Dans le second, on manipule des lois de probabilité et des variables aléatoires continues.

Notations : si a et b sont deux nombres réels, on désigne par $a \wedge b$ le plus petit de ces deux nombres. Tout au long du sujet, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé ; les variables aléatoires utilisées sont toutes définies sur cet espace. Sous réserve de son existence, l'espérance d'une variable aléatoire réelle X est notée $E(X)$.

Problème 1 (Distance en variation et couplage)

Partie I (Distance en variation)

Dans cette première partie, on considère un ensemble discret $\mathcal{K}$, supposé soit fini, soit égal à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{K}$ et, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\bar{A}$ le complémentaire de A dans $\mathcal{K}$.

Soient P et Q deux lois de probabilité sur $\mathcal{K}$. Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on pose $p_k = P(\{k\})$ et $q_k = Q(\{k\})$. On rappelle que $p_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathcal{K}$ et que

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k = 1.$$

De plus, toute probabilité P est entièrement déterminée par la donnée de $(p_k)_{k \in \mathcal{K}}$, puisque, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \sum_{k \in A} p_k.$$

Lorsque $\mathcal{K}$ est fini, on définit la distance en variation entre les probabilités P et Q par

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|. \quad (\text{i})$$

I. 1) Lorsque $\mathcal{K} = \{0, 1\}$, exprimer $D(P, Q)$ en fonction de p_1 et q_1 .

I. 2) Lorsque $\mathcal{K} = \mathbb{N}$, vérifier que la série de terme général $(|p_k - q_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On étend la définition de la distance en variation donnée par (i) au cas où $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

I. 3) Vérifier que $|P(A) - Q(A)| \in [0, 1]$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

I. 4) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$2|P(A) - Q(A)| = \left| \sum_{k \in A} (p_k - q_k) \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k) \right|.$$

I. 5) En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P, Q). \quad (\text{ii})$$

I. 6) Montrer que la partie $A_0 = \{k \in \mathcal{K} : q_k \geq p_k\}$ réalise l'égalité dans (ii), c'est-à-dire que

$$|P(A_0) - Q(A_0)| = D(P, Q).$$

I. 7) Démontrer la formule

$$D(P, Q) = 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} (p_k \wedge q_k).$$

I. 8) On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X est de loi P et Y de loi Q . Autrement dit, pour tout $k \in \mathcal{K}$,

$$P(X = k) = p_k \quad \text{et} \quad P(Y = k) = q_k.$$

Montrer que $D(P, Q) \leq P(X \neq Y)$.

Partie II (Couplage binomiale-Poisson)

Soit n un entier strictement positif et λ un réel strictement positif, strictement plus petit que n .

L'objet de cette deuxième partie est d'étudier un exemple : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson en termes de distance en variation. Plus précisément, si $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ désigne la loi binomiale de paramètres n et λ/n , et si $\mathcal{P}(\lambda)$ désigne la loi de Poisson de paramètre λ , le but est de prouver la majoration

$$D(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{\lambda^2}{n}, \quad (\text{iv})$$

où D est définie en (i).

II. 1) Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ/n . Donner sans démonstration la loi de

$$\sum_{i=1}^n Y_i.$$

II. 2) Vérifier que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = 1 - (1 - x) \exp(x)$$

appartient à $[0, 1]$.

Soient $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $f(\lambda/n)$. On suppose que la famille $(U_1, \dots, U_n)$ est indépendante de la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ de la question II. 1). Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$, et $X_i = 1$ sinon.

II. 3) Vérifier que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre λ/n , et donner la loi de

$$\sum_{i=1}^n X_i.$$

II. 4) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$P(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

On pourra établir que, pour tout réel x , $1 + x \leq \exp(x)$.

II. 5) Montrer que

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}\right).$$

II. 6) En déduire que

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq \frac{\lambda^2}{n},$$

puis conclure quant à (iv).

II. 7) Quel résultat connu peut-on déduire de (iv) lorsque n tend vers l'infini ?

Problème 2 (Couplage exponentielle-normale)

Dans ce problème, X désigne une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite, φ sa densité et Φ sa fonction de répartition. On note par ailleurs f la densité de la loi exponentielle de paramètre égal à 1. On définit également, pour tout réel x ,

$$g(x) = -\ln(1 - \Phi(x)),$$

puis $Y = g(X)$.

On admet que X possède des moments de tout ordre, ce qui signifie que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \varphi(x) dx$ converge.

Partie I (Quantiles gaussiens)

On démontre dans cette partie des résultats utiles pour la partie II.

- I. 1) Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, dont on notera Φ^{-1} l'application réciproque.
- I. 2) Calculer la fonction de répartition de Y , puis constater que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
- I. 3) a) Vérifier la validité de l'identité suivante, pour tout $x > 0$:

$$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

- I. 3) b) En déduire l'encadrement

$$1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1 \quad \text{pour tout } x > 0. \quad (\text{E})$$

Indication pour la minoration : on pourra montrer tout d'abord que

$$\int_x^{+\infty} t^{-2} \varphi(t) dt \leq x^{-3} \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt.$$

I. 3) c) Montrer l'équivalence

$$1 - \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

I. 3) d) En utilisant (E), énoncé à la question I. 3) b), montrer que, pour tout $x > 1$,

$$\ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \leq \ln(x) - g(x) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} \leq 0,$$

et en déduire l'équivalence $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2/2$.

Partie II (Inégalité de transport)

On définit une application h sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = t \ln(t) - t + 1$ pour $t > 0$ et $h(0) = 1$.

II. 1) Vérifier que h est une application continue de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$.

Sous réserve de sa convergence, on note $K(f, \varphi)$ la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) h \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right) dx.$$

On désire vérifier l'inégalité de transport

$$E((X - Y)^2) \leq 2K(f, \varphi). \quad (\text{v})$$

II. 2) Montrer que g est une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , calculer $g'(x)$ et vérifier l'identité $g'(x)f(g(x)) = \varphi(x)$.

II. 3) Vérifier que l'intégrale définissant $K(f, \varphi)$ converge et montrer que

$$K(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left(\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))} \right) dx.$$

Pour établir cette identité, utiliser le changement de variable $u = g(x)$, d'abord sur un segment, puis justifier le passage aux limites.

II. 4) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2 dx$ converge et justifier l'égalité

$$E((X - Y)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2 dx.$$

II. 5) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1 - g'(x)) dx$ converge.

II. 6) Démontrer que

$$K(f, \varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))} \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1 - g'(x)) dx.$$

On pourra utiliser, en la justifiant, l'inégalité $\ln(u) \leq u - 1$, pour tout réel strictement positif u .

II. 7) Conclure grâce à une intégration par parties que l'on justifiera soigneusement.