



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2006

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1 (Distance en variation et couplage)

Partie I (Distance en variation)

I. 1)

Les deux probabilités ont une masse totale égale à 1, donc $p_0 = 1 - p_1$ et $q_0 = 1 - q_1$.

Ainsi $p_0 - q_0 = -(p_1 - q_1)$ et

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} (|p_0 - q_0| + |p_1 - q_1|) = |p_1 - q_1|.$$

Sur un ensemble à deux éléments, la distance est donc la différence absolue des probabilités de l'un des éléments.

I. 2)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la positivité de p_k et de q_k donne $0 \leq |p_k - q_k| \leq p_k + q_k$. Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (p_k + q_k) = 2.$$

Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|$$

converge.

La définition de $D(P, Q)$ est donc valable aussi lorsque $\mathcal{K} = \mathbb{N}$. En particulier, toutes les sommes de différences de masses utilisées dans la suite convergent absolument.

I. 3)

Puisque P et Q sont des probabilités, $0 \leq P(A) \leq 1$ et $0 \leq Q(A) \leq 1$. Leur différence appartient donc à $[-1, 1]$, ce qui entraîne $0 \leq |P(A) - Q(A)| \leq 1$.

I. 4)

La réunion disjointe $A \cup \bar{A} = \mathcal{K}$ donne $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $Q(\bar{A}) = 1 - Q(A)$. Par conséquent,

$$\sum_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k) = P(\bar{A}) - Q(\bar{A}) = -(P(A) - Q(A)) = -\sum_{k \in A} (p_k - q_k).$$

Les deux sommes ont donc la même valeur absolue, égale à $|P(A) - Q(A)|$. Leur somme est bien $2|P(A) - Q(A)|$, comme demandé. Les regroupements sont licites grâce à la convergence absolue établie en I. 2).

I. 5)

En appliquant l'inégalité triangulaire à chacune des deux sommes de I. 4), on obtient

$$2|P(A) - Q(A)| \leq \sum_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k| = \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

La division par 2 donne $|P(A) - Q(A)| \leq D(P, Q)$ pour toute partie A de $\mathcal{K}$.

I. 6)

Sur $A_0 = \{k : q_k \geq p_k\}$, tous les nombres $p_k - q_k$ sont négatifs ou nuls ; sur $\bar{A}_0$, ils sont strictement positifs. Il n'y a donc aucune compensation de signes à l'intérieur de chacune des sommes :

$$\left| \sum_{k \in A_0} (p_k - q_k) \right| = \sum_{k \in A_0} |p_k - q_k|, \quad \left| \sum_{k \in \bar{A}_0} (p_k - q_k) \right| = \sum_{k \in \bar{A}_0} |p_k - q_k|.$$

L'identité de I. 4), appliquée à A_0 , devient donc

$$2|P(A_0) - Q(A_0)| = \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

Ainsi $|P(A_0) - Q(A_0)| = D(P, Q)$.

Cette conclusion reste valable si $P = Q$: tous les termes sont alors nuls et $A_0 = \mathcal{K}$.

I. 7)

Pour deux réels positifs ou nuls a, b , l'identité $|a - b| = a + b - 2 \min(a, b)$ s'établit en distinguant $a \leq b$ et $b \leq a$. Elle donne ici

$$|p_k - q_k| = p_k + q_k - 2(p_k \wedge q_k).$$

La série des minimums converge puisque $0 \leq p_k \wedge q_k \leq p_k$. En sommant l'identité précédente, puis en utilisant

$$\sum p_k = \sum q_k = 1,$$

il vient

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \left(1 + 1 - 2 \sum_{k \in \mathcal{K}} (p_k \wedge q_k) \right) = 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} (p_k \wedge q_k).$$

I. 8)

Méthode 1 — Majorer la probabilité d'égalité.

Les événements $\{X = Y = k\}$, pour $k \in \mathcal{K}$, sont deux à deux incompatibles et leur réunion est $\{X = Y\}$. Pour chacun d'eux,

$$P(X = Y = k) \leq P(X = k) = p_k, \quad P(X = Y = k) \leq P(Y = k) = q_k.$$

Ainsi

$$P(X = Y) \leq \sum_{k \in \mathcal{K}} (p_k \wedge q_k).$$

En passant aux complémentaires et en appliquant I. 7),

$$P(X \neq Y) \geq 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} (p_k \wedge q_k) = D(P, Q).$$

Méthode 2 — Comparer deux événements associés au même ensemble.

Pour une partie A de $\mathcal{K}$, on décompose les événements selon l'appartenance de l'autre variable à A :

$$P(A) - Q(A) = P(X \in A, Y \notin A) - P(X \notin A, Y \in A).$$

Les deux événements du membre de droite sont disjoints et tous deux contenus dans $\{X \neq Y\}$. L'inégalité $|a - b| \leq a + b$, pour $a, b \geq 0$, entraîne donc $|P(A) - Q(A)| \leq P(X \neq Y)$. En choisissant $A = A_0$ et en appliquant I. 6), on retrouve $D(P, Q) \leq P(X \neq Y)$.

La première méthode utilise les masses communes des deux lois ; la seconde est utile

lorsqu'on dispose directement d'événements à comparer. Aucune indépendance de X et Y n'est nécessaire.

Partie II (Couplage binomiale-Poisson)

Dans cette partie, on pose $t = \lambda/n$. L'hypothèse $0 < \lambda < n$ garantit $0 < t < 1$.

II. 1)

La somme de variables de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson dont le paramètre est la somme des paramètres. Les hypothèses sont satisfaites ici ; par conséquent,

$$\sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{P}(nt) = \mathcal{P}(\lambda).$$

II. 2)

La fonction $f : x \mapsto 1 - (1 - x)e^x$ est dérivable sur $[0, 1]$, avec $f'(x) = xe^x \geq 0$. Elle est donc croissante sur cet intervalle. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Le nombre $f(t)$ est donc bien un paramètre admissible de loi de Bernoulli.

II. 3)

Par définition, X_i ne prend que les valeurs 0 et 1. Les variables U_i et Y_i sont indépendantes, d'où

$$P(X_i = 0) = P(U_i = 0, Y_i = 0) = (1 - f(t))e^{-t} = (1 - t)e^te^{-t} = 1 - t.$$

Ainsi $P(X_i = 1) = t$, donc $X_i \sim \mathcal{B}(1, t)$.

L'indépendance des deux familles, jointe à l'indépendance interne de chacune, assure l'indépendance mutuelle des variables $U_1, Y_1, \dots, U_n, Y_n$. Chaque X_i est une fonction du

seul couple (U_i, Y_i) : le lemme des coalitions montre donc que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. La somme de ces variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre suit alors la loi

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, t) = \mathcal{B}(n, \lambda/n).$$

II. 4)

Méthode 1 — Décrire exactement les cas de désaccord.

Si $Y_i = 1$, alors $X_i = 1$; si $Y_i \geq 2$, alors $X_i = 1 \neq Y_i$; si $Y_i = 0$, il y a désaccord exactement lorsque $U_i = 1$. Les deux derniers cas sont disjoints. Ainsi,

$$P(X_i \neq Y_i) = P(Y_i \geq 2) + P(Y_i = 0, U_i = 1) = 1 - e^{-t}(1 + t) + e^{-t}f(t).$$

En remplaçant $f(t)$ par sa définition,

$$P(X_i \neq Y_i) = 1 - e^{-t}(1 + t) + e^{-t} - (1 - t) = t(1 - e^{-t}).$$

Pour justifier l'inégalité indiquée, on considère $r(x) = e^x - 1 - x$. Sa dérivée $r'(x) = e^x - 1$ est négative pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$. Son minimum est $r(0) = 0$; donc $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x . Avec $x = -t$, on obtient $1 - e^{-t} \leq t$. Par conséquent,

$$P(X_i \neq Y_i) = t(1 - e^{-t}) \leq t^2 = \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

Méthode 2 — Utiliser l'écart absolu moyen.

Les valeurs de X_i et Y_i étant entières, la variable égale à 1 lorsque $X_i \neq Y_i$ et à 0 sinon est majorée par $|X_i - Y_i|$. De plus, $|X_i - Y_i| \leq X_i + Y_i$ et ces deux variables ont une espérance finie égale à t . On peut donc prendre les espérances et écrire

$$P(X_i \neq Y_i) \leq E(|X_i - Y_i|).$$

Or $\min(X_i, Y_i)$ vaut 1 si $Y_i \geq 1$, et 0 si $Y_i = 0$. L'identité $|X_i - Y_i| = X_i + Y_i - 2\min(X_i, Y_i)$ entraîne

$$E(|X_i - Y_i|) = 2t - 2(1 - e^{-t}) = 2(t - 1 + e^{-t}).$$

Pour $s \geq 0$, l'inégalité précédente donne $0 \leq 1 - e^{-s} \leq s$. Comme

$$t - 1 + e^{-t} = \int_0^t (1 - e^{-s}) ds, \text{ on en déduit}$$

$$E(|X_i - Y_i|) \leq 2 \int_0^t s ds = t^2.$$

On retrouve la majoration demandée. La première méthode fournit la probabilité exacte de désaccord; la seconde illustre un contrôle par un écart moyen, sans exiger un résultat général supplémentaire sur les probabilités.

II. 5)

Si $X_i = Y_i$ pour tous les indices i , les deux sommes sont égales. Par contraposition,

$$\left\{ \sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i \right\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}.$$

La croissance de la probabilité par inclusion donne immédiatement l'inégalité demandée. La réciproque de l'inclusion n'est pas nécessaire : plusieurs désaccords individuels peuvent se compenser dans une somme.

II. 6)

L'inégalité de la réunion, valable sans hypothèse d'indépendance des événements, et les questions II. 4) et II. 5) donnent

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(X_i \neq Y_i) \leq n \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n}.$$

On applique maintenant I. 8) au couple constitué de ces deux sommes. Leurs lois, établies en II. 1) et II. 3), sont respectivement $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$. Par suite,

$$D(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)) \leq P\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

La majoration (iv) est démontrée.

II. 7)

On fixe $\lambda > 0$ et l'on considère les entiers $n > \lambda$. Soit $Z_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité de I. 5) appliquée à la partie $\{k\}$ donne

$$|P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq D(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{\lambda^2}{n} \rightarrow 0.$$

Les variables étant à valeurs entières, la caractérisation de la convergence en loi par les probabilités ponctuelles permet de conclure que Z_n converge en loi vers Z . On retrouve donc l'approximation binomiale-Poisson ; la majoration obtenue est plus précise puisqu'elle contrôle uniformément la différence des probabilités de toute partie de $\mathbb{N}$.

Problème 2 (Couplage exponentielle-normale)

Dans tout ce problème, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$. Cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 , et vérifie $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$. On choisit la densité exponentielle usuelle $f(u) = e^{-u}$ pour $u \geq 0$ et $f(u) = 0$ pour $u < 0$; sa valeur au seul point 0 ne modifie aucune intégrale.

Partie I (Quantiles gaussiens)

I. 1)

La fonction Φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\Phi'(x) = \varphi(x) > 0$. Elle est donc strictement croissante. Comme toute fonction de répartition, elle tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

Pour tout réel x , les intégrales de la densité strictement positive à gauche et à droite de x sont strictement positives; ainsi $0 < \Phi(x) < 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que toute valeur de $]0, 1[$ est atteinte, et la stricte croissance assure qu'elle ne l'est qu'une fois. Donc $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ est bijective, avec une réciproque Φ^{-1} bien définie sur $]0, 1[$.

I. 2)

Pour tout réel x , $0 < 1 - \Phi(x) < 1$, donc $g(x) > 0$. Par conséquent, $Y = g(X) > 0$ et $F_Y(y) = 0$ si $y \leq 0$.

Si $y > 0$, la croissance du logarithme donne les équivalences

$$g(X) \leq y \iff 1 - \Phi(X) \geq e^{-y} \iff \Phi(X) \leq 1 - e^{-y} \iff X \leq \Phi^{-1}(1 - e^{-y}).$$

La dernière équivalence utilise la stricte croissance de Φ , et la réciproque est bien définie car $1 - e^{-y} \in]0, 1[$. Ainsi

$$F_Y(y) = \Phi(\Phi^{-1}(1 - e^{-y})) = 1 - e^{-y} \quad \text{si } y > 0.$$

En conclusion, $F_Y(y) = 0$ pour $y \leq 0$ et $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ pour $y > 0$: Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

I. 3) a)

Fixons $x > 0$. Sur tout segment $[x, b]$ avec $b > x$, l'identité $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$ permet d'écrire

$$\int_x^b \varphi(t) dt = \int_x^b \frac{-\varphi'(t)}{t} dt = \left[-\frac{\varphi(t)}{t} \right]_x^b - \int_x^b \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

Il s'agit d'une intégration par parties entre fonctions de classe C^1 sur le segment. L'intégrale du reste converge en $+\infty$ car $0 \leq \varphi(t)/t^2 \leq \varphi(t)/x^2$ pour $t \geq x$. De plus, $\varphi(b)/b \rightarrow 0$ par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances. En faisant tendre b vers $+\infty$, on obtient donc

$$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

I. 3) b)

Le reste intégral est positif ou nul, donc I. 3) a) donne $1 - \Phi(x) \leq \varphi(x)/x$.

Pour la minoration, on suit l'indication. Si $t \geq x > 0$, alors $t^{-2} \leq x^{-3}t$, d'où

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^3} \int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt = \frac{\varphi(x)}{x^3}.$$

La dernière égalité résulte de la primitive $-\varphi$ de $t \mapsto t\varphi(t)$ et de $\varphi(t) \rightarrow 0$ en $+\infty$. En reportant dans I. 3) a),

$$\frac{\varphi(x)}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Comme $x/\varphi(x) > 0$, on obtient bien (E). Pour $0 < x \leq 1$, la borne inférieure peut être négative ; cela ne remet pas en cause sa validité.

I. 3) c)

Les deux bornes de (E) tendent vers 1 quand $x \rightarrow +\infty$. Par encadrement, $x(1 - \Phi(x))/\varphi(x) \rightarrow 1$. Les fonctions comparées étant strictement positives, c'est exactement

$$1 - \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

I. 3) d)

Pour $x > 1$, tous les termes de (E) sont strictement positifs. On peut donc leur appliquer la fonction logarithme, qui est croissante :

$$\ln(1 - x^{-2}) \leq \ln\left(\frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)}\right) \leq 0.$$

Or $\ln(1 - \Phi(x)) = -g(x)$ et $\ln \varphi(x) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{x^2}{2}$. On obtient l'encadrement demandé,

$$\ln(1 - x^{-2}) \leq \ln x - g(x) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} \leq 0.$$

Le membre de gauche tend vers 0. Ainsi il existe une fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 en $+\infty$ telle que

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \varepsilon(x).$$

La division par $x^2/2$, suivie des croissances comparées $\ln x/x^2 \rightarrow 0$, donne $g(x)/(x^2/2) \rightarrow 1$. Donc $g(x) \sim x^2/2$. On a utilisé un encadrement logarithmique explicite, sans composer directement une équivalence avec le logarithme.

Partie II (Inégalité de transport)

II. 1)

Sur $]0, +\infty[$, la fonction $h(t) = t \ln t - t + 1$ est continue. En 0, la limite $t \ln t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$, obtenue par croissance comparée, donne $h(t) \rightarrow 1 = h(0)$. Ainsi h est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour $t > 0$, $h'(t) = \ln t$. La fonction est donc décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Son minimum sur $]0, +\infty[$ est $h(1) = 0$, et $h(0) = 1 \geq 0$. Elle prend donc bien ses valeurs dans $[0, +\infty[$.

II. 2)

La fonction $1 - \Phi$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par composition et dérivation du logarithme, g est dérivable, et même de classe C^1 , avec

$$g'(x) = \frac{\varphi(x)}{1 - \Phi(x)} > 0.$$

Puisque $g(x) > 0$, on a $f(g(x)) = e^{-g(x)} = 1 - \Phi(x)$. En multipliant, on obtient bien

$$g'(x)f(g(x)) = \varphi(x).$$

De plus, les limites de Φ donnent $g(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, et $g(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. La fonction g , continue et strictement croissante, réalise donc une bijection de

$\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Ces propriétés permettront le changement de variable de la question suivante.

II. 3)

Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine $u = g(x)$ est précisé dans l'énoncé.

On établit d'abord la convergence de l'intégrale initiale. Pour $u < 0$, $f(u) = 0$, donc $\varphi(u)h(f(u)/\varphi(u)) = \varphi(u)h(0) = \varphi(u)$. L'intégrale converge donc sur $] -\infty, 0]$.

Pour $u \geq 0$, le quotient $f(u)/\varphi(u)$ est strictement positif. En posant $c = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$, on a

$$\ln \left(\frac{f(u)}{\varphi(u)} \right) = -u + \frac{u^2}{2} + c.$$

En développant la définition de h , il vient

$$\varphi(u)h \left(\frac{f(u)}{\varphi(u)} \right) = e^{-u} \left(-u + \frac{u^2}{2} + c \right) - e^{-u} + \varphi(u).$$

Tous les termes du membre de droite sont absolument intégrables sur $[0, +\infty[$. Pour le

vérifier, posons $I_k(b) = \int_0^b u^k e^{-u} du$ pour $b > 0$ et $k \in \{0, 1, 2\}$. On a $I_0(b) = 1 - e^{-b}$.

Pour $k = 1, 2$, une intégration par parties sur le segment $[0, b]$ donne

$I_k(b) = -b^k e^{-b} + k I_{k-1}(b)$. Ainsi,

$$I_1(b) = 1 - (b+1)e^{-b}, \quad I_2(b) = 2 - (b^2 + 2b + 2)e^{-b}.$$

Les termes de bord tendent vers 0 par croissance comparée ; les intégrales de e^{-u} , ue^{-u} et $u^2 e^{-u}$ sur $[0, +\infty[$ convergent donc et valent respectivement 1, 1, 2. L'intégrale de φ converge puisqu'il s'agit d'une densité. L'intégrale définissant $K(f, \varphi)$ converge donc.

Les intégrales de f et de φ sur $\mathbb{R}$ valant toutes deux 1, les termes $-f + \varphi$ se compensent après intégration. Sans écrire de logarithme de f là où cette fonction est nulle, on obtient

$$K(f, \varphi) = \int_0^{+\infty} f(u) \ln \left(\frac{f(u)}{\varphi(u)} \right) du.$$

Appliquons maintenant l'indication. Pour deux réels $a < b$, la fonction g est de classe C^1 et strictement croissante sur $[a, b]$, et le logarithme considéré est continu sur $[g(a), g(b)] \subset]0, +\infty[$. Le changement de variable $u = g(x)$ donne, grâce à II. 2),

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \ln \left(\frac{f(u)}{\varphi(u)} \right) du = \int_a^b \varphi(x) \ln \left(\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))} \right) dx.$$

La même substitution, effectuée avec la valeur absolue du logarithme, montre que les intégrales absolues à droite sont majorées par $\int_0^{+\infty} |f(u) - u + u^2/2 + c| du < +\infty$. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ à droite est donc absolument convergente. Comme $g(a) \rightarrow 0$ et $g(b) \rightarrow +\infty$ lorsque $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$, le passage aux limites dans l'égalité sur segments est justifié et donne

$$K(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left(\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))} \right) dx.$$

Les valeurs des intégrales élémentaires calculées ci-dessus donnent également $K(f, \varphi) = -1 + \frac{1}{2} \times 2 + c = c = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

II. 4)

Méthode 1 — Contrôler la croissance de la fonction de transfert.

Sur $] -\infty, 0]$, la croissance de g donne $0 < g(x) \leq g(0) = \ln 2$. Sur $[0, +\infty[$, l'équivalence de I. 3) d), jointe à la continuité de g sur tout segment, assure l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $g(x) \leq C(1 + x^2)$. En augmentant C si nécessaire, cette dernière majoration est valable sur tout $\mathbb{R}$.

Pour tous réels a, b , $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, car $2|ab| \leq a^2 + b^2$. On a donc

$$0 \leq \varphi(x)(x - g(x))^2 \leq \varphi(x)(2x^2 + 2C^2(1 + x^2)^2).$$

Le membre de droite est une combinaison de $\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$ et $x^4\varphi(x)$. Leurs intégrales convergent par l'hypothèse admise sur les moments de X . Par comparaison, l'intégrale demandée converge. La fonction $x \mapsto (x - g(x))^2$ est continue et positive, donc le théorème de transfert s'applique et donne

$$E((X - Y)^2) = E((X - g(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2 dx.$$

Méthode 2 — Utiliser les moments des lois déjà identifiées.

On sait que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et que $Y \sim \mathcal{E}(1)$. Ainsi $E(X^2) = 1$ et $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 1 + 1 = 2$. La variable $2X^2 + 2Y^2$ a donc une espérance finie égale à 6. L'inégalité ponctuelle $0 \leq (X - Y)^2 \leq 2X^2 + 2Y^2$ assure que $(X - Y)^2$ possède une espérance finie. Le théorème de transfert appliqué à X et à la fonction continue $x \mapsto (x - g(x))^2$ fournit alors simultanément la convergence de l'intégrale et la même égalité.

La première méthode donne un contrôle analytique réutilisable dans les intégrales suivantes ; la seconde exploite plus rapidement les moments des lois marginales et ne suppose aucune indépendance entre X et Y .

II. 5)

On montre une convergence absolue. Comme $g'(x) > 0$, on a $\varphi(x)|1 - g'(x)| \leq \varphi(x) + \varphi(x)g'(x)$. Il suffit donc de vérifier l'intégrabilité de $\varphi g'$.

Si $x \leq 0$, alors $1 - \Phi(x) \geq 1/2$. La formule de II. 2) donne $0 < g'(x) \leq 2\varphi(x)$, donc

$$0 \leq \varphi(x)g'(x) \leq 2\varphi(x)^2 \leq 2\varphi(0)\varphi(x).$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $] -\infty, 0]$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, I. 3) c) et la formule de g' donnent $g'(x)/x \rightarrow 1$. Il existe donc $R > 0$ tel que $g'(x) \leq 2x$ pour $x \geq R$. On a alors $0 \leq \varphi(x)g'(x) \leq 2x\varphi(x)$, fonction intégrable par l'existence du premier moment absolu de X . Sur le segment $[0, R]$, le produit $\varphi g'$ est continu, donc intégrable.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g'(x) dx < +\infty$, et l'intégrale de $\varphi(x)(1 - g'(x))$ converge absolument.

II. 6)

Pour $u > 0$, la fonction $\ell(u) = u - 1 - \ln u$ a pour dérivée $\ell'(u) = (u - 1)/u$. Elle décroît sur $]0, 1]$ puis croît sur $[1, +\infty[$, et son minimum est $\ell(1) = 0$. Ainsi $\ln u \leq u - 1$ pour tout $u > 0$.

L'identité de II. 2) donne $f(g(x)) = \varphi(x)/g'(x)$, avec $g'(x) > 0$. On peut donc écrire

$$\ln \left(\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))} \right) = \ln \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))} \right) - \ln g'(x) \geq \ln \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))} \right) + 1 - g'(x).$$

Toutes les intégrales en jeu sont bien définies. Le terme de gauche est absolument intégrable contre φ par II. 3), et le dernier terme l'est par II. 5). Pour le terme restant, la formule de la densité normale donne

$$\ln \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))} \right) = \frac{g(x)^2 - x^2}{2}.$$

La majoration de g établie en II. 4), ou le transfert donnant $\int \varphi g^2 = E(Y^2) = 2$, montre que l'intégrale de sa valeur absolue contre φ converge. On peut donc intégrer l'inégalité ponctuelle, d'abord sur un segment puis en passant aux deux limites, et utiliser II. 3). Il vient bien

$$K(f, \varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))} \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1 - g'(x)) dx.$$

II. 7)

On effectue l'intégration par parties sur un segment $[a, b]$, avec la fonction

$v(x) = x - g(x)$, de classe C^1 . Puisque $v' = 1 - g'$ et $\varphi' = -x\varphi$, on a

$$\int_a^b \varphi(x)(1 - g'(x)) dx = [\varphi(x)(x - g(x))]_a^b + \int_a^b x\varphi(x)(x - g(x)) dx.$$

Justifions le passage aux bornes infinies. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $0 < g(x) \leq \ln 2$; donc

$|\varphi(x)(x - g(x))| \leq \varphi(x)(|x| + \ln 2) \rightarrow 0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la majoration

$g(x) \leq C(1 + x^2)$ donne également $|\varphi(x)(x - g(x))| \leq \varphi(x)(x + C(1 + x^2)) \rightarrow 0$. Ces

limites résultent des croissances comparées de l'exponentielle et des puissances.

L'intégrale de gauche converge absolument par II. 5). Celle de droite aussi : la

majoration globale $g(x) \leq C(1 + x^2)$ entraîne

$$|x\varphi(x)(x - g(x))| \leq \varphi(x)(x^2 + C|x| + C|x|^3),$$

et les moments absolus correspondants de la loi normale sont finis par hypothèse. On

peut donc faire tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ dans l'identité sur segments. On obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1 - g'(x)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x^2 - xg(x)) dx.$$

En reportant cette égalité et la formule logarithmique de II. 6) dans l'inégalité de cette même question, on arrive à

$$K(f, \varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left(\frac{g(x)^2 - x^2}{2} + x^2 - xg(x) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2 dx.$$

La question II. 4) identifie la dernière intégrale à $E((X - Y)^2)$. Ainsi

$$E((X - Y)^2) \leq 2K(f, \varphi),$$

ce qui démontre (v). Ici, la valeur calculée en II. 3) donne aussi $E((X - Y)^2) \leq \ln(2\pi)$.

Relevé des adaptations

- Problème 2, II. 3) : ajout de l'indication $u = g(x)$, avec calcul sur un segment puis passage aux limites. Le programme demande que les changements de variable non affines soient précisés dans les exercices. Le résultat demandé et la numérotation sont conservés.