



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2005

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Dans ce problème, les variables aléatoires sont toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne son espérance.

Lorsque $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles, on note, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Préliminaires

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, admettant une espérance m et une variance finie. Énoncer, avec précision, la loi faible des grands nombres pour cette suite (X_n) .
2. Soit δ un réel strictement positif et A une partie de $\mathbb{R}$ telle que les probabilités ci-dessous soient définies et que l'intervalle $]m - \delta, m + \delta[$ soit inclus dans le complémentaire de A . Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \in A\right).$$

Partie I. Un exemple discret

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$, et $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X . On note

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

On rappelle que $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$.

1. a) Montrer que pour tout s réel, la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance $E(e^{sX})$.

b) Déterminer la fonction $\varphi : s \mapsto E(e^{sX})$.

2. a) Préciser la loi de S_n .

b) Déterminer $\frac{S_n}{n}(\Omega)$ et la loi de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

c) Soit s réel. Montrer que $E(e^{sS_n/n}) = (\varphi(s/n))^n$.

Soit a un réel fixé de $]0, 1[$.

3. a) On note $K_a = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid k/n \geq a\}$. Soit s un réel positif. Montrer que

$$E(e^{sS_n/n}) \geq \sum_{k \in K_a} e^{sk/n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geq e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right).$$

b) Montrer que pour tout $s \geq 0$,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (\varphi(s/n))^n e^{-as}.$$

4. On suppose dans cette question que $a > p$.

a) Étudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction ℓ_a définie par $\ell_a(s) = as - \ln \varphi(s)$.

b) Montrer que la fonction ℓ_a atteint sur $\mathbb{R}^+$ un maximum strictement positif $h(a, p)$ que l'on calculera en fonction de a et p .

c) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n \sup_{t>0} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a, p)}.$$

5. On suppose dans cette question que $a < p$ (donc $1 - a > 1 - p$).

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - S_n$.

b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-n \sup_{t < 0} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(1-a, 1-p)} = e^{-nh(a, p)}.$$

Pour $0 < a < 1$, on utilise désormais la même expression $h(a, p)$ quelle que soit la position de a par rapport à p .

6. Soit $\varepsilon > 0$. Pour traiter également les seuils situés au bord ou en dehors du support, on prolonge h par

$$h(0, p) = -\ln(1 - p), \quad h(1, p) = -\ln p, \quad h(a, p) = +\infty \text{ si } a \notin [0, 1],$$

avec la convention $e^{-\infty} = 0$.

a) Dédurre des questions précédentes que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n \min(h(p-\varepsilon, p), h(p+\varepsilon, p))}.$$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$.

7. Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p , avec $0 < p < 1$, d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p . Pour cela il teste la machine et prélève un échantillon de n , avec $n \geq 1$, objets qu'il analyse.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par $X_i = 1$ si le i -ième objet prélevé est défectueux, et $X_i = 0$ sinon. On suppose que, dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

On dit qu'un estimateur T_n de p est sans biais lorsque $E(T_n) = p$. Son risque quadratique est $E((T_n - p)^2)$, lorsque cette espérance existe.

- a) Montrer que $F_n = \frac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de p .
- b) Calculer le risque quadratique $r_n = E((F_n - p)^2)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.
8. Soit α un réel de $]0, 1[$. On souhaite déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre p inconnu, au niveau de confiance au moins $1 - \alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

- a) Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\sqrt{n} \frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
- b) Soit f_n la réalisation de F_n sur l'échantillon considéré. Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Montrer que les bornes aléatoires

$$U_n = F_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, \quad V_n = F_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}$$

vérifient $\liminf_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq p \leq V_n) \geq 1 - \alpha$. On pourra utiliser $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et la convergence des probabilités d'intervalles obtenue par le théorème limite central.

Expliquer pourquoi ce résultat conduit à l'intervalle de confiance asymptotique observé

$$\left[f_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, f_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \right].$$

Partie II. Un exemple continu

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels a pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ est convergente.

Pour l'étude en 0, on pourra encadrer l'intégrande, sur $]0, 1]$, entre $e^{-1}t^{a-1}$ et t^{a-1} , puis intégrer explicitement la puissance sur $[u, 1]$, avec $u > 0$, avant de faire tendre u vers 0.

Pour tout $a \in \mathcal{D}$, on pose $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

2. Exprimer $\Gamma(a+1)$ en fonction de $\Gamma(a)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $\alpha \geq 1$ fixé. Montrer que la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

est une densité.

On dira qu'une variable aléatoire X de densité f_α est une variable aléatoire qui suit la loi $\gamma(\alpha)$ ainsi définie ; aucune propriété de cette famille n'est supposée connue en dehors des résultats établis ou admis dans le problème.

On admettra que si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi $\gamma(\alpha)$ et Y suivant une loi $\gamma(\beta)$, avec $\alpha, \beta \geq 1$, alors $X + Y$ suit une loi $\gamma(\alpha + \beta)$.

On admettra également que, sous ces mêmes hypothèses et lorsque les espérances existent, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

4. a) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi $\gamma(\alpha)$, avec $\alpha \geq 1$. Calculer l'espérance $E(X)$.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X . Pour tout

$n \geq 1$, on note

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

5. a) Déterminer l'ensemble I des réels s tels que e^{sX} admette une espérance $E(e^{sX})$.
On pose alors $\varphi(s) = E(e^{sX})$.

b) Montrer que la fonction φ est positive et convexe sur son domaine de définition I .

c) Soit $s \in I$. Montrer que $E(e^{sS_n/n}) = (\varphi(s/n))^n$.

6. Soit $a > 0$. En utilisant le théorème de transfert, montrer que pour tout $s \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$E(e^{sS_n/n}) \geq e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right),$$

puis que pour tout $s \in I \cap \mathbb{R}^-$,

$$E(e^{sS_n/n}) \geq e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right).$$

7. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq \alpha$. Pour tout $s \in I$, on pose $\ell_a(s) = as - \ln \varphi(s)$. Étudier la fonction ℓ_a et dresser son tableau de variation.

8. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $h(a) = \sup_{s \in I} \ell_a(s)$. Exprimer $h(a)$ en fonction de a .
Montrer que si $a \neq \alpha$, alors $h(a) > 0$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, \dots, X_n)$ est un n -échantillon de la loi de X . On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

a) Montrer que, pour tout s tel que $0 < s < n$,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (\varphi(s/n))^n e^{-as}.$$

b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \inf_{0 < s < n} e^{-as} (\varphi(s/n))^n.$$

c) Montrer que si $a > \alpha$, alors

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}^+} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a)}.$$

10. Montrer que si $0 < a < \alpha$, alors

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-n \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}^-} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a)}.$$

11. Soit $\varepsilon > 0$. On prolonge h par $h(a) = +\infty$ lorsque $a \leq 0$, avec la convention $e^{-\infty} = 0$.

Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \alpha\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-nH(\alpha, \varepsilon)},$$

où $H(\alpha, \varepsilon) = \min(h(\alpha - \varepsilon), h(\alpha + \varepsilon))$.