



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2005

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaires

1. Question adaptée au programme actuel. L'indépendance et l'existence d'une variance finie sont précisées afin d'appliquer la loi faible des grands nombres dans le cadre du programme. La seule identité des lois et l'existence d'une espérance ne suffisent pas à l'énoncé initial sans hypothèse supplémentaire.

La loi faible des grands nombres affirme que, si les X_k sont indépendantes, de même espérance m et de même variance finie σ^2 , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Les hypothèses de la question impliquent celles de ce résultat. Pour retrouver directement sa conclusion, la linéarité de l'espérance et l'indépendance donnent

$$E(S_n/n) = m, \quad V(S_n/n) = \sigma^2/n.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit alors $P(|S_n/n - m| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2/(n\varepsilon^2)$, dont le membre de droite tend vers 0.

2. Question adaptée au programme actuel. On précise que les probabilités écrites sont définies, sans introduire de question de théorie de la mesure.

Si $S_n/n \in A$, alors $S_n/n \notin]m - \delta, m + \delta[$, d'où $|S_n/n - m| \geq \delta$. Ainsi

$$0 \leq P(S_n/n \in A) \leq P(|S_n/n - m| \geq \delta).$$

La loi faible des grands nombres, applicable par les hypothèses du préliminaire 1, entraîne donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n/n \in A) = 0.$$

Partie I. Un exemple discret

On conserve $q = 1 - p$, avec $0 < p, q < 1$.

1. a) La variable e^{sX} ne prend que les deux valeurs réelles finies 1 et e^s . Elle admet donc

une espérance pour tout $s \in \mathbb{R}$. Le calcul ne nécessite aucune condition de convergence d'une série infinie.

b) Le théorème de transfert sur les deux valeurs de X donne

$$\varphi(s) = e^0 P(X=0) + e^s P(X=1) = q + pe^s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $\varphi(s) > 0$, ce qui permettra de prendre son logarithme.

2. a) La variable S_n compte les succès parmi n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Par définition de la loi binomiale,

$$S_n \sim \mathcal{B}(n, p), \quad P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

b) Toutes les probabilités précédentes sont strictement positives. Les valeurs prises par S_n/n sont donc exactement $0, 1/n, \dots, n/n$ et, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(S_n/n = k/n) = P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

c) Méthode 1 — Transfert et formule du binôme.

La variable exponentielle prend un nombre fini de valeurs. Le transfert donne

$$E(e^{sS_n/n}) = \sum_{k=0}^n e^{sk/n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{s/n})^k q^{n-k}.$$

Le binôme de Newton transforme cette somme en $(q + pe^{s/n})^n = (\varphi(s/n))^n$.

Méthode 2 — Indépendance des facteurs.

L'identité

$$e^{sS_n/n} = \prod_{i=1}^n e^{sX_i/n}$$

et l'indépendance des X_i impliquent l'indépendance des facteurs, chacun d'espérance finie. L'espérance d'un produit de variables indépendantes se factorise donc :

$$E(e^{sS_n/n}) = \prod_{i=1}^n E(e^{sX_i/n}) = (\varphi(s/n))^n.$$

La première méthode exploite la loi de la somme ; la seconde évite de la calculer et se réutilise pour d'autres lois.

3. a) Tous les termes du transfert de la question 2.c sont positifs. En conservant uniquement les indices de K_a , on obtient

$$E(e^{sS_n/n}) \geq \sum_{k \in K_a} e^{sk/n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Pour $k \in K_a$ et $s \geq 0$, l'inégalité $k/n \geq a$ implique $e^{sk/n} \geq e^{as}$. Par conséquent,

$$\sum_{k \in K_a} e^{sk/n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geq e^{as} \sum_{k \in K_a} P(S_n = k) = e^{as} P(S_n/n \geq a).$$

Ces arguments restent valables pour $s = 0$ et si K_a est vide. Ils établissent les deux inégalités demandées directement, sans invoquer une inégalité extérieure au cours exigible.

- b) La quantité e^{as} est strictement positive. En divisant l'inégalité précédente et en utilisant 2.c, on obtient, pour tout $s \geq 0$,

$$P(S_n/n \geq a) \leq e^{-as} E(e^{sS_n/n}) = e^{-as} (\varphi(s/n))^n.$$

4. a) Pour $s \geq 0$, on a $\ell_a(s) = as - \ln(q + pe^s)$. Cette fonction est dérivable et

$$\ell'_a(s) = a - \frac{pe^s}{q + pe^s} = \frac{aq - (1-a)pe^s}{q + pe^s}.$$

Comme $0 < a < 1$, le numérateur s'annule une seule fois, en

$$s_a = \ln \left(\frac{aq}{p(1-a)} \right).$$

L'hypothèse $a > p$ équivaut à $aq > p(1-a)$, donc $s_a > 0$. Le dénominateur est positif ; le numérateur décroît strictement. Ainsi ℓ_a croît strictement sur $[0, s_a]$ et décroît strictement sur $[s_a, +\infty[$.

On a $\ell_a(0) = 0$. Enfin, l'écriture

$$\ell_a(s) = (a-1)s - \ln(p + qe^{-s})$$

montre que $\ell_a(s) \rightarrow -\infty$ lorsque $s \rightarrow +\infty$, puisque $a-1 < 0$ et $\ln(p + qe^{-s}) \rightarrow \ln p$.

b) Le tableau de variation précédent établit que le maximum est atteint uniquement en $s_a > 0$. Puisque ℓ_a croît strictement entre 0 et s_a , ce maximum est strictement positif.

Pour le calculer, on utilise $e^{s_a} = aq/(p(1-a))$, puis

$$q + pe^{s_a} = q + \frac{aq}{1-a} = \frac{q}{1-a}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \ell_a(s_a) &= a \ln \left(\frac{aq}{p(1-a)} \right) - \ln \left(\frac{q}{1-a} \right) \\ &= a \ln \frac{a}{p} + (1-a) \ln \frac{1-a}{q}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$h(a, p) = a \ln \frac{a}{p} + (1 - a) \ln \frac{1 - a}{1 - p} > 0 \quad (p < a < 1).$$

c) Dans la borne de 3.b, posons $s = nt$, avec $t > 0$. Cette substitution parcourt tous les paramètres strictement positifs et donne

$$P(S_n/n \geq a) \leq e^{-n(at - \ln \varphi(t))} = e^{-n\ell_a(t)}.$$

On choisit $t = s_a$, qui est positif et réalise le maximum de 4.b. On en déduit

$$P(S_n/n \geq a) \leq e^{-nh(a, p)} = e^{-n \sup_{t>0} (at - \ln \varphi(t))}.$$

L'optimisation porte sur un paramètre réel déterministe ; aucun échange entre espérance et limite n'intervient.

5. a) Les variables $1 - X_i$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre q . Or

$$n - S_n = \sum_{i=1}^n (1 - X_i).$$

Ainsi

$$n - S_n \sim \mathcal{B}(n, q).$$

b) Méthode 1 — Échange des succès et des échecs.

L'événement $[S_n/n \leq a]$ est identique à $[(n - S_n)/n \geq 1 - a]$. Comme $1 - a > q$, la question 4.c appliquée aux Bernoulli de paramètre q donne

$$P(S_n/n \leq a) \leq e^{-nh(1-a, q)}.$$

La formule calculée en 4.b donne

$$h(1 - a, q) = (1 - a) \ln \frac{1 - a}{q} + a \ln \frac{a}{p} = h(a, p).$$

Il reste à identifier le supremum demandé. Pour $u > 0$, la fonction associée aux Bernoulli de paramètre q est $\psi(u) = p + qe^u = e^u \varphi(-u)$. Ainsi

$$(1-a)u - \ln \psi(u) = -au - \ln \varphi(-u).$$

La substitution $t = -u$ établit donc

$$\sup_{u>0} ((1-a)u - \ln \psi(u)) = \sup_{t<0} (at - \ln \varphi(t)) = h(a, p),$$

d'où toutes les égalités demandées.

Méthode 2 — Paramètre exponentiel négatif.

Pour $s < 0$, les termes du transfert correspondant à $k/n \leq a$ vérifient $e^{sk/n} \geq e^{sa}$. Comme dans 3.a, on obtient $P(S_n/n \leq a) \leq e^{-as}(\varphi(s/n))^n$.

Avec $s = nt$, $t < 0$, le majorant devient $e^{-n\ell_a(t)}$. La dérivée calculée en 4.a conserve sa formule sur tout $\mathbb{R}$. Son unique zéro est $s_a = \ln(aq/(p(1-a))) < 0$, car $a < p$. Elle est positive avant ce zéro et négative après. Le maximum sur $] -\infty, 0[$ vaut donc $\ell_a(s_a) = h(a, p)$, avec la même expression que ci-dessus. Il est strictement positif puisque $\ell_a(0) = 0$ et ℓ_a décroît strictement entre s_a et 0.

Le choix $t = s_a$ donne à nouveau $P(S_n/n \leq a) \leq e^{-nh(a,p)}$. La première méthode réutilise la borne supérieure déjà démontrée ; la seconde montre directement pourquoi le signe du paramètre exponentiel doit changer.

6. a) Question adaptée au programme actuel. La formule initiale n'avait pas de sens pour tous les $\varepsilon > 0$, puisque $p \pm \varepsilon$ peut sortir de $]0, 1[$. Le prolongement indiqué traite exactement ces cas.

Si $0 < p - \varepsilon < p$, la question 5 donne

$$P(S_n/n \leq p - \varepsilon) \leq e^{-nh(p-\varepsilon,p)}.$$

Si $p - \varepsilon = 0$, cette probabilité vaut $P(S_n = 0) = q^n = e^{-nh(0,p)}$. Si $p - \varepsilon < 0$, elle vaut $0 = e^{-nh(p-\varepsilon,p)}$.

De même, lorsque $p < p + \varepsilon < 1$, la question 4 donne

$$P(S_n/n \geq p + \varepsilon) \leq e^{-nh(p+\varepsilon,p)}.$$

À $p + \varepsilon = 1$, cette probabilité vaut $p^n = e^{-nh(1,p)}$; au-delà de 1, elle vaut 0.

Les événements des deux queues sont disjoints car $\varepsilon > 0$. Leur réunion est $[|S_n/n - p| \geq \varepsilon]$. En additionnant les deux bornes, puis en majorant chacune par celle qui a le plus petit exposant, on obtient

$$P(|S_n/n - p| \geq \varepsilon) \leq e^{-nh(p-\varepsilon,p)} + e^{-nh(p+\varepsilon,p)} \leq 2e^{-n \min(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p))}.$$

Si les deux seuils sont extérieurs à $[0, 1]$, les deux probabilités sont nulles et la borne vaut également 0.

b) Méthode 1 — Borne exponentielle.

Pour un seuil intérieur différent de p , les questions 4 et 5 ont établi $h > 0$. Aux extrémités, $-\ln p > 0$ et $-\ln q > 0$. Les autres valeurs sont $+\infty$. Ainsi, si le minimum de 6.a est fini, c'est un réel strictement positif et son majorant exponentiel tend vers 0. Si ce minimum est infini, la probabilité est déjà nulle. Dans tous les cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n/n - p| \geq \varepsilon) = 0.$$

Méthode 2 — Bienaymé-Tchebychev.

La loi binomiale donne $E(S_n/n) = p$ et $V(S_n/n) = pq/n$. La variance est finie, donc

$$P(|S_n/n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Cette seconde méthode donne rapidement la limite. La première fournit une décroissance exponentielle, plus précise pour un seuil fixé.

7. a) Question adaptée au programme actuel. La notion de biais est définie dans l'énoncé afin de ne pas supposer un chapitre théorique supplémentaire d'estimation.

La variable $F_n = S_n/n$ dépend de l'échantillon observable et est donc un estimateur de p . Les variables étant bornées, toutes les espérances utilisées existent. Par linéarité,

$$E(F_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = p.$$

Cet estimateur est donc sans biais. Une réalisation f_n est la proportion effectivement observée d'objets défectueux; elle se distingue de la variable aléatoire F_n .

- b) Question adaptée au programme actuel. Le risque quadratique est défini dans l'énoncé.

Puisque $E(F_n) = p$, le risque demandé est exactement la variance de F_n . Les variables X_i sont indépendantes de variance pq ; par conséquent,

$$r_n = E((F_n - p)^2) = V(F_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{pq}{n}.$$

Il s'ensuit $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$. Cette conclusion est obtenue par un calcul particulier d'espérance et de variance.

8. a) Les variables X_i sont indépendantes, de même loi, d'espérance p et de variance $p(1-p) > 0$. Toutes les hypothèses du théorème limite central sont donc satisfaites. Il donne

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- b) Question adaptée au programme actuel. L'intervalle construit à partir du quantile normal est asymptotique : l'énoncé initial ne pouvait pas garantir pour tout n la couverture finie annoncée. Les bornes aléatoires dépendent de F_n , et leurs réalisations dépendent de f_n .

La fonction Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites 0 et 1, avec $\Phi(0) = 1/2$. Comme $1 - \alpha/2 \in]1/2, 1[$, il existe un unique $t_\alpha > 0$ ayant la propriété demandée. Par symétrie de la loi normale,

$$P(-t_\alpha \leq Z \leq t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha.$$

La convergence des probabilités d'intervalles, conséquence du théorème limite central, implique

$$P(|Z_n| \leq t_\alpha) \rightarrow 1 - \alpha.$$

Or $p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$. Par conséquent,

$$[|Z_n| \leq t_\alpha] \subset \left[|F_n - p| \leq \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \right] = [U_n \leq p \leq V_n].$$

En prenant la limite inférieure des probabilités, on obtient bien

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq p \leq V_n) \geq 1 - \alpha.$$

On peut même préciser la limite sans règle générale sur les convergences. Le paramètre p est fixé; ainsi

$$P(U_n \leq p \leq V_n) = P\left(|Z_n| \leq \frac{t_\alpha}{2\sqrt{p(1-p)}}\right) \rightarrow 2\Phi\left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \geq 1 - \alpha.$$

Après observation, on remplace F_n par sa réalisation f_n pour obtenir

$[f_n - t_\alpha/(2\sqrt{n}), f_n + t_\alpha/(2\sqrt{n})]$. Les bornes sont calculables sans connaître p . Leur éventuelle sortie de $[0, 1]$ ne pose pas de difficulté : l'intersection avec $[0, 1]$ conserve exactement l'événement de couverture puisque $p \in]0, 1[$.

Il n'est pas affirmé que la couverture est au moins $1 - \alpha$ pour chaque taille finie. Par exemple, pour $n = 1$, $p = 1/2$ et $\alpha = 1/2$, on a $t_\alpha < 1$; les deux intervalles possibles, centrés en 0 ou 1 et de demi-largeur $t_\alpha/2 < 1/2$, excluent p . La couverture est alors nulle, ce qui explique la rectification.

Partie II. Un exemple continu

1. Question adaptée au programme actuel. L'étude de la singularité éventuelle en 0 est guidée par un encadrement et un calcul explicite de primitive.

Fixons $a \in \mathbb{R}$. Sur $]0, 1]$, $e^{-1} \leq e^{-t} \leq 1$, donc

$$e^{-1}t^{a-1} \leq t^{a-1}e^{-t} \leq t^{a-1}.$$

Pour $u \in]0, 1[$ et $a \neq 0$, on calcule

$$\int_u^1 t^{a-1} dt = \frac{1 - u^a}{a}.$$

Si $a > 0$, cette expression tend vers $1/a$. Si $a < 0$, elle tend vers $+\infty$. Pour $a = 0$, l'intégrale vaut $-\ln u \rightarrow +\infty$. L'encadrement précédent montre donc que l'intégrale étudiée converge en 0 si et seulement si $a > 0$.

À l'infini, les croissances comparées donnent $t^{a+1}e^{-t} \rightarrow 0$. Il existe donc $T \geq 1$ tel que, pour $t \geq T$, $0 \leq t^{a-1}e^{-t} \leq 1/t^2$. L'intégrale de $1/t^2$ converge sur $[T, +\infty[$. L'intégrande étant continue sur $[1, T]$, la convergence à l'infini est acquise pour tout a réel.

On conclut que $\mathcal{D} =]0, +\infty[$. Pour $a > 0$, $\Gamma(a)$ est strictement positive, car son intégrande est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

2. Pour $a > 0$ et $0 < u < v$, on effectue une intégration par parties sur le segment $[u, v]$, avec les fonctions $t \mapsto t^a$ et $t \mapsto -e^{-t}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment :

$$\int_u^v t^a e^{-t} dt = [-t^a e^{-t}]_u^v + a \int_u^v t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Lorsque $u \rightarrow 0^+$, $u^a e^{-u} \rightarrow 0$ puisque $a > 0$. Lorsque $v \rightarrow +\infty$, $v^a e^{-v} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Les deux intégrales généralisées convergent d'après la question 1. Le passage aux limites donne donc

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

D'autre part, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. La récurrence précédente fournit successivement $\Gamma(2) = 1$, puis, par récurrence sur $n \geq 1$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

3. Question adaptée au programme actuel. Le paramètre de la densité est restreint à $\alpha \geq 1$. Pour $0 < \alpha < 1$, l'expression de l'original diverge à droite de 0, alors que le cadre du programme demande des limites latérales finies des densités en chaque point réel. L'étude analytique de $\Gamma(a)$ pour tout $a > 0$ reste conservée.

Puisque $\alpha > 0$, la question 1 garantit $0 < \Gamma(\alpha) < +\infty$. La fonction f_α est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. En 0, sa limite à gauche vaut 0; à droite, elle vaut 1 si $\alpha = 1$, car $\Gamma(1) = 1$, et 0 si $\alpha > 1$. Les limites latérales sont donc finies.

Sa normalisation résulte directement de la définition de Γ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = 1.$$

Les critères de caractérisation d'une densité sont satisfaits. Ainsi f_α est une densité dans le cadre retenu.

Résultat admis dans cette version adaptée : si X et Y sont indépendantes, de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$ définies dans l'énoncé, avec $\alpha, \beta \geq 1$, alors $X + Y$ suit la loi $\gamma(\alpha + \beta)$. Ce résultat particulier, déjà admis dans le sujet original, permettra de déterminer la loi de S_n sans formule de convolution.

Résultat admis dans cette version adaptée : sous ces mêmes hypothèses, lorsque les espérances existent, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Il s'agit également d'une propriété de l'indépendance figurant au programme; son utilisation suppose les espérances finies.

4. a) La variable X est positive presque sûrement. L'intégrale qui définit son espérance absolue est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_\alpha(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Elle est finie par la question 1. L'espérance existe donc; en utilisant la relation de la question 2, on obtient

$$E(X) = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha.$$

- b) Le résultat de stabilité admis en 3 s'applique par récurrence aux sommes successives : S_1 suit $\gamma(\alpha)$; si S_k suit $\gamma(k\alpha)$, le lemme des coalitions donne son indépendance avec X_{k+1} , et le résultat admis implique que S_{k+1} suit $\gamma((k+1)\alpha)$. Les paramètres restent au moins égaux à 1. Ainsi $S_n \sim \gamma(n\alpha)$.

Pour déterminer la loi de $Y_n = S_n/n$, on passe par sa fonction de répartition. Elle est nulle pour $y \leq 0$. Pour $y > 0$,

$$P(Y_n \leq y) = P(S_n \leq ny) = \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^{ny} t^{n\alpha-1} e^{-t} dt.$$

En dérivant sur $]0, +\infty[$, on obtient la densité

$$g_n(y) = \begin{cases} \frac{n^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} y^{n\alpha-1} e^{-ny} & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

La fonction de répartition est continue en 0 et de classe $\mathcal{C}^1$ ailleurs. Cette densité caractérise la loi demandée. En général, Y_n ne suit pas une loi $\gamma(\alpha)$ de la famille à échelle fixée définie dans l'énoncé.

5. a) Le transfert, appliqué à l'intégrande positif, conduit à l'intégrale

$$E(e^{sX}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-(1-s)t} dt,$$

sous réserve de sa convergence. Si $s < 1$, on pose $u = (1-s)t$, changement de variable affine strictement croissant, d'abord sur un segment puis dans les intégrales généralisées convergentes. Il vient

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-(1-s)t} dt = (1-s)^{-\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

Cette intégrale est finie et $\varphi(s) = (1-s)^{-\alpha}$.

Si $s = 1$, l'intégrande est $t^{\alpha-1}$ et son intégrale sur $[1, R]$ vaut $(R^\alpha - 1)/\alpha \rightarrow +\infty$. Si $s > 1$, l'intégrande est au moins $t^{\alpha-1}$ sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale diverge aussi. On conclut que

$$I =]-\infty, 1[, \quad \varphi(s) = (1-s)^{-\alpha} \quad (s < 1).$$

- b) La formule précédente donne immédiatement $\varphi(s) > 0$ pour $s < 1$. Cette fonction est deux fois dérivable sur l'intervalle ouvert I et

$$\varphi'(s) = \alpha(1-s)^{-\alpha-1}, \quad \varphi''(s) = \alpha(\alpha+1)(1-s)^{-\alpha-2} > 0.$$

Une fonction deux fois dérivable dont la dérivée seconde est positive sur un intervalle est convexe sur cet intervalle. Ainsi φ est même strictement convexe sur I . Ce calcul utilise la formule explicite de φ et aucune dérivation sous le signe intégral.

- c) Méthode 1 — Produit de variables indépendantes.

Si $s < 1$ et $n \geq 1$, alors $s/n < 1$: pour $s \geq 0$, $s/n \leq s < 1$; pour $s < 0$, $s/n < 0 < 1$. Les variables $e^{sX_i/n}$ sont donc intégrables, et elles sont indépendantes comme fonctions de variables indépendantes. Leur produit est intégrable et

$$E(e^{sS_n/n}) = \prod_{i=1}^n E(e^{sX_i/n}) = (\varphi(s/n))^n = (1-s/n)^{-n\alpha}.$$

Méthode 2 — Densité de la moyenne.

Avec la densité g_n calculée en 4.b, on obtient

$$E(e^{sY_n}) = \frac{n^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{n\alpha-1} e^{-(n-s)y} dy.$$

Comme $s < 1 \leq n$, on a $n-s > 0$. Le changement affine $u = (n-s)y$ ramène l'intégrale à $(n-s)^{-n\alpha} \Gamma(n\alpha)$, donc

$$E(e^{sY_n}) = \left(\frac{n}{n-s} \right)^{n\alpha} = (\varphi(s/n))^n.$$

La première méthode utilise seulement l'indépendance ; la seconde contrôle aussi le facteur d'échelle dans la densité de Y_n .

6. Question adaptée au programme actuel. On explicite $a > 0$, qui était utilisé dans l'original avant d'avoir été introduit dans cette partie.

On note toujours $Y_n = S_n/n$. Pour $s \in I \cap \mathbb{R}^+ = [0, 1[$, l'intégrabilité est garantie par 5.c. Le transfert avec g_n et la positivité donnent

$$E(e^{sY_n}) = \int_0^{+\infty} e^{sy} g_n(y) dy \geq \int_a^{+\infty} e^{sy} g_n(y) dy.$$

Pour $y \geq a$, $e^{sy} \geq e^{sa}$; ainsi

$$E(e^{sY_n}) \geq e^{sa} \int_a^{+\infty} g_n(y) dy = e^{sa} P(Y_n \geq a).$$

Pour $s \in I \cap \mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$, on conserve cette fois la partie $]0, a]$ de l'intégrale. Puisque $sy \geq sa$ pour $0 < y \leq a$,

$$E(e^{sY_n}) \geq \int_0^a e^{sy} g_n(y) dy \geq e^{sa} \int_0^a g_n(y) dy = e^{sa} P(Y_n \leq a).$$

La variable Y_n admettant une densité, la probabilité de $Y_n = a$ est nulle, ce qui rend indifférent le choix d'une borne ouverte ou fermée dans les intégrales. La démonstration suit le transfert demandé; elle ne suppose pas connue l'inégalité de Markov.

7. Pour $s < 1$,

$$\ell_a(s) = as + \alpha \ln(1-s), \quad \ell'_a(s) = a - \frac{\alpha}{1-s}.$$

Le dénominateur $1-s$ est positif. La dérivée s'annule exactement en $s_a = 1 - \alpha/a < 1$. Elle est positive pour $s < s_a$ et négative pour $s > s_a$. On a donc une croissance stricte sur $] -\infty, s_a]$, puis une décroissance stricte sur $[s_a, 1[$.

Quand $s \rightarrow 1^-$, le terme as tend vers a et $\alpha \ln(1-s) \rightarrow -\infty$, donc $\ell_a(s) \rightarrow -\infty$.

Quand $s \rightarrow -\infty$, posons $u = 1-s \rightarrow +\infty$. Alors $\ell_a(s) = a - au + \alpha \ln u$, et $\ln u/u \rightarrow 0$; il s'ensuit $\ell_a(s) \rightarrow -\infty$.

Le tableau de variation peut ainsi s'écrire :

s	$-\infty$	s_a	1^-
Signe de ℓ'_a	+	0	—
Variation de ℓ_a	$-\infty \nearrow$	$\ell_a(s_a)$	$\searrow -\infty$

Si $a > \alpha$, on a $s_a > 0$; si $a < \alpha$, on a $s_a < 0$. Le maximum sera donc atteint du côté du paramètre exponentiel qui convient à la queue étudiée.

8. La question 7 établit que, pour $a \neq \alpha$, le supremum est un maximum atteint en s_a . Le même calcul de dérivée reste valable pour $a = \alpha$: le maximum est alors atteint en $s_a = 0$. Puisque $1 - s_a = \alpha/a$,

$$h(a) = a \left(1 - \frac{\alpha}{a}\right) + \alpha \ln \frac{\alpha}{a} = a - \alpha - \alpha \ln \frac{a}{\alpha} \quad (a > 0).$$

Méthode 1 — Variation de ℓ_a .

On sait que $\ell_a(0) = 0$. Si $a \neq \alpha$, $s_a \neq 0$, et la stricte variation entre 0 et s_a donne $\ell_a(s_a) > \ell_a(0)$. Ainsi $h(a) > 0$. Si $a = \alpha$, la formule donne $h(\alpha) = 0$.

Méthode 2 — Inégalité logarithmique.

Pour $x > 0$, la fonction $r(x) = x - 1 - \ln x$ vérifie $r'(x) = (x - 1)/x$. Elle décroît sur $]0, 1]$ puis croît sur $[1, +\infty[$, avec $r(1) = 0$. Donc $r(x) > 0$ pour $x \neq 1$.

La formule précédente s'écrit $h(a) = \alpha r(a/\alpha)$. Comme $\alpha > 0$, elle donne $h(a) > 0$ exactement lorsque $a \neq \alpha$. La première méthode s'appuie sur l'optimisation déjà effectuée; la seconde fournit un moyen direct de reconnaître la positivité de la formule explicite.

9. a) Ici s peut appartenir à tout $]0, n[$. Il ne suffit donc pas de citer sans précision 6, dont l'énoncé ne considérerait que $s < 1$. On reprend son argument de transfert dans le domaine plus large où l'espérance existe.

Si $0 < s < n$, alors $s/n < 1$. La méthode de factorisation de 5.c s'applique et donne $E(e^{sY_n}) = (\varphi(s/n))^n < +\infty$. Comme $s > 0$, l'intégration sur $[a, +\infty[$ donne, exactement comme en 6,

$$e^{sa} P(Y_n \geq a) \leq E(e^{sY_n}) = (\varphi(s/n))^n.$$

Après division par $e^{sa} > 0$, on obtient la borne demandée pour tout $0 < s < n$.

- b) La probabilité $P(Y_n \geq a)$ est inférieure ou égale à chacun des réels positifs $e^{-as}(\varphi(s/n))^n$ lorsque s parcourt l'intervalle non vide $]0, n[$. Elle est donc un minorant de cet ensemble de valeurs et est inférieure ou égale à sa borne inférieure :

$$P(Y_n \geq a) \leq \inf_{0 < s < n} e^{-as}(\varphi(s/n))^n.$$

- c) La substitution $t = s/n$ transforme la condition $0 < s < n$ en $0 < t < 1$ et le majorant en

$$e^{-as}(\varphi(s/n))^n = e^{-n(at - \ln \varphi(t))} = e^{-n\ell_a(t)}.$$

Si $a > \alpha$, le maximum de ℓ_a est atteint en $s_a = 1 - \alpha/a \in]0, 1[$, d'après 7. Ainsi l'infimum de 9.b est atteint pour $s = ns_a$, et vaut $e^{-nh(a)}$. Le maximum sur $I \cap \mathbb{R}^+ = [0, 1[$ est le même, puisque $s_a > 0$ et $\ell_a(s_a) > \ell_a(0) = 0$. Finalement,

$$P(S_n/n \geq a) \leq e^{-n \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}^+} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a)}.$$

10. Soit $0 < a < \alpha$. Pour tout $s < 0$, le transfert de 6 et la formule de 5.c donnent

$$P(Y_n \leq a) \leq e^{-as}(\varphi(s/n))^n = e^{-n\ell_a(s/n)}.$$

Le paramètre $t = s/n$ parcourt tout $] -\infty, 0[$. D'après 7, $s_a = 1 - \alpha/a < 0$ réalise le maximum de ℓ_a sur I , donc également sur $I \cap \mathbb{R}^- =] -\infty, 0[$. En prenant $s = ns_a < 0$, on obtient

$$P(S_n/n \leq a) \leq e^{-n \sup_{t \in I \cap \mathbb{R}^-} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a)}.$$

Cette démonstration traite explicitement la queue inférieure avec un paramètre négatif; aucun résultat général sur les grandes déviations n'est utilisé.

11. Question adaptée au programme actuel. Le prolongement par $+\infty$ aux seuils $a \leq 0$ rend la formule définie pour tout $\varepsilon > 0$.

La variable $Y_n = S_n/n$ admet la densité g_n , nulle sur $] -\infty, 0]$. Elle est donc strictement positive presque sûrement. Si $\alpha - \varepsilon \leq 0$, l'événement $[Y_n \leq \alpha - \varepsilon]$ a une probabilité nulle, égale à $e^{-nh(\alpha-\varepsilon)}$ avec la convention de l'énoncé.

Si $\alpha - \varepsilon > 0$, il appartient à $]0, \alpha[$ et la question 10 donne $P(Y_n \leq \alpha - \varepsilon) \leq e^{-nh(\alpha-\varepsilon)}$.

Dans tous les cas, $\alpha + \varepsilon > \alpha$, donc 9.c donne $P(Y_n \geq \alpha + \varepsilon) \leq e^{-nh(\alpha+\varepsilon)}$.

La réunion disjointe de ces deux événements est $[|Y_n - \alpha| \geq \varepsilon]$. On additionne et on majore chacun des deux termes par $e^{-nH(\alpha,\varepsilon)}$, où H est le minimum des deux valeurs de h . Il vient

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \alpha\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh(\alpha-\varepsilon)} + e^{-nh(\alpha+\varepsilon)} \leq 2e^{-nH(\alpha,\varepsilon)}.$$

Ici $h(\alpha + \varepsilon)$ est toujours fini et strictement positif; l'autre valeur est strictement positive ou infinie. Ainsi $H(\alpha, \varepsilon) > 0$, et la borne exprime une concentration exponentielle de la moyenne autour de son espérance α .

Relevé des adaptations

- Préliminaire 1 : ajout de l'indépendance et d'une variance finie pour appliquer la loi faible des grands nombres dans le cadre du programme. L'énoncé initial n'imposait que l'identité des lois et l'existence d'une espérance.
- Préliminaire 2 : précision que les probabilités utilisées sont définies, sans étude de mesurabilité.

- I.6.a–b : prolongement de $h(a, p)$ aux seuils 0, 1 et hors de $[0, 1]$ pour conserver la quantification $\varepsilon > 0$ et traiter les probabilités exactes aux bords.
- I.7.a–b : définitions du caractère sans biais et du risque quadratique dans le sujet ; les calculs demandés sont conservés.
- I.8.b : remplacement de la garantie de couverture à taille finie par une garantie asymptotique, avec indication $p(1 - p) \leq 1/4$ et théorème limite central ; distinction entre les bornes aléatoires et leurs réalisations. La garantie finie de l'original est fausse en général.
- II.1 : ajout d'un encadrement explicite et d'une indication de calcul pour étudier la borne 0 sans importer un chapitre général de singularités aux bornes finies.
- II.3 et hypothèses reprises en II.4 : restriction du paramètre de la densité à $\alpha \geq 1$, afin de conserver des limites latérales finies en 0. La famille est entièrement définie dans l'énoncé, et la stabilité particulière déjà admise par le PDF reste admise ; aucun cours général sur la loi gamma n'est supposé. La fonction analytique Γ reste étudiée sur tout $]0, +\infty[$.
- II.6 : précision explicite $a > 0$ avant sa première utilisation dans cette partie.
- II.11 : prolongement $h(a) = +\infty$ pour $a \leq 0$, afin de traiter tous les $\varepsilon > 0$ et l'absence de masse en 0.