



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2004

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E_n = \{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$ et Ω l'ensemble des permutations de E_n , c'est-à-dire des bijections de E_n sur lui-même. Pour tout ensemble fini A , on note $\text{Card}(A)$ son cardinal, c'est-à-dire son nombre d'éléments.

Pour un entier k , on note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k , le nombre $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $0 \leq k \leq n$, et 0 sinon.

On rappelle la formule de Poincaré sous sa forme ensembliste : si A est un ensemble fini et si $A_1, \dots, A_n$ sont des sous-ensembles de A , alors

$$\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Partie I

1. Rappeler la valeur de $\text{Card}(\Omega)$. Pour tout $i \in E_n$, on pose $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega(i) = i\}$.
2. Montrer que, pour tout $k \in E_n$ et tous $i_1, \dots, i_k$ tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$,

$$\text{Card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) = (n-k)!.$$

En déduire, pour tout $k \in E_n$, la valeur de

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

3. On note $D_{n,0} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in E_n, \omega(i) \neq i\}$.

Plus généralement, $D_{m,0}$ désigne l'ensemble des permutations sans point fixe d'un ensemble à m éléments. Pour $m = 0$, l'unique permutation de l'ensemble vide est comptée : $\text{Card}(D_{0,0}) = 1$. Pour $m = 1$, $\text{Card}(D_{1,0}) = 0$.

a) Montrer que

$$d = \text{Card}(D_{n,0}) = n! - \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Pour tout $k \in E_n$, on appelle $D_{n,k}$ l'ensemble des permutations ayant exactement k points fixes : il existe $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tels que $\omega(i_j) = i_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $\omega(\ell) \neq \ell$ pour tout $\ell \notin \{i_1, \dots, i_k\}$.

b) Montrer que, pour tout $k \in E_n$,

$$d_k = \text{Card}(D_{n,k}) = \binom{n}{k} \text{Card}(D_{n-k,0}).$$

On pourra choisir d'abord l'ensemble des points fixes, puis considérer la restriction de la permutation à son complémentaire.

c) Montrer que, pour tout $k \in E_n$,

$$d_k = s_k - \binom{k+1}{k} s_{k+1} + \binom{k+2}{k} s_{k+2} - \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} s_n.$$

4. On pose $d_0 = d = \text{Card}(D_{n,0})$ et $s_0 = n!$.

a) Écrire la matrice du système d'équations donnant $(d_0, d_1, \dots, d_n)$ en fonction de $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, ces deux familles étant représentées par des matrices colonnes.

b) En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , donner l'expression de l'endomorphisme représenté par cette matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

c) En déduire que cet endomorphisme est inversible en exprimant son inverse.

d) En déduire la relation liant $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ à $(d_0, d_1, \dots, d_n)$.

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante :

- mettre en vente, au prix unitaire de b euros, n exemplaires du produit ;
- numéroter chaque exemplaire de façon apparente par un nombre compris entre 1 et n ;
- placer à l'intérieur de chaque exemplaire, de façon cachée, un second numéro ;
- verser B euros à l'acheteur qui trouvera à l'intérieur d'un exemplaire un numéro identique à celui figurant à l'extérieur.

On suppose $b > 0$ et $B > 0$. Les numéros apparents sont tous différents ; les numéros cachés sont eux aussi tous différents, compris entre 1 et n et choisis au hasard. Tous les exemplaires sont vendus. On étudie le résultat net de cette opération pour l'entreprise, égal aux recettes de vente diminuées des sommes versées aux gagnants, sans prendre en compte les coûts de production.

Avant de donner son accord, le directeur général souhaite étudier ce résultat.

Pour formaliser le choix au hasard, on munit l'ensemble fini Ω de la probabilité uniforme P : pour toute partie A de Ω ,

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de gagnants.

1. a) En utilisant les résultats de la question I.3, déterminer la loi de X_n .

b) Établir les égalités

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1.$$

On justifiera de manière précise l'interversion des deux signes sommes.

2. Pour toute partie A de Ω , on note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire égale à 1 sur A et à 0 sur son complémentaire. Justifier l'égalité

$$X_n = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \cdots + \mathbf{1}_{A_n},$$

et en déduire l'espérance de X_n .

3. a) Montrer que

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \mathbf{1}_{A_i \cap A_j}.$$

b) En déduire la variance $V(X_n)$ de X_n .

4. a) Montrer que le résultat net aléatoire de l'opération pour l'entreprise est donné par

$$C_n = nb - BX_n.$$

En déduire son espérance $E(C_n)$ ainsi que le risque mesuré par l'écart type $\sigma(C_n)$.

b) Quelle sera, d'après vous, la réponse du directeur général ?

5. Montrer que le gain d'un acheteur ayant acquis un seul produit est donné par

$$G_n = BY_n - b,$$

où Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$. En déduire le gain moyen de l'acheteur.

Partie III

1. Montrer que la suite des variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
2. Montrer que, pour tout $k \in E_n$,

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|.$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=m}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \leq \frac{2}{m!}.$$

On remarquera que, pour tout $k \geq 1$, $m(m+1) \cdots (m+k-1) \geq m^k$.

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k+1)!} \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}.$$

5. On considère les instructions Python suivantes. La commande `print(k)` affiche la valeur de la variable `k`.

Python

```
eps = 0.00001
x = 2
k = 2
while x > eps / 2:
    x = x * (2 / k)
```

```
k = k + 1
print(k)
```

- a) On entre dans la boucle `while` avec $x = 2$. On suppose qu'on est passé $j \geq 1$ fois dans cette boucle. Quelle est la valeur de x à l'entrée de la boucle la fois suivante ?
- b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ est décroissante et admet une limite que l'on calculera.
- c) En déduire que la boucle `while` se termine.
- d) La valeur affichée par la dernière ligne est 14. Que représente-t-elle ?

Partie IV

On suppose dans cette partie qu'un acheteur a acquis ℓ exemplaires distincts du produit, avec $1 \leq \ell \leq n$. L'ensemble de leurs numéros apparents est noté $L = \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\}$.

On note Y_n^ℓ le nombre d'exemplaires gagnants parmi ces ℓ exemplaires achetés.

1. On rappelle que $\mathbf{1}_A$ désigne la variable aléatoire égale à 1 sur A et à 0 sur son complémentaire. Justifier l'égalité

$$Y_n^\ell = \mathbf{1}_{A_{j_1}} + \mathbf{1}_{A_{j_2}} + \dots + \mathbf{1}_{A_{j_\ell}}.$$

En déduire l'espérance $E(Y_n^\ell)$.

2. a) Montrer que

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{A_{j_i}} + \sum_{\substack{1 \leq i, k \leq \ell \\ i \neq k}} \mathbf{1}_{A_{j_i} \cap A_{j_k}}.$$

- b) En déduire la variance $V(Y_n^\ell)$.
3. a) Montrer que le gain de l'acheteur est égal à $G_n = BY_n^\ell - b\ell$.
- b) Déterminer son gain moyen ainsi que l'écart type de ce gain.
- c) Du point de vue de l'acheteur, est-il intéressant d'acquérir plusieurs exemplaires du produit ?