



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2004

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Une permutation est une bijection de E_n sur lui-même. On peut choisir l'image de 1 de n façons, puis celle de 2 de $n - 1$ façons, et ainsi de suite jusqu'à l'unique image restante. Ces choix successifs donnent exactement une permutation, et toute permutation est obtenue une seule fois. Ainsi,

$$\text{Card}(\Omega) = n!.$$

L'événement A_i est l'ensemble des permutations ayant i pour point fixe.

2. Fixons k indices distincts $i_1, \dots, i_k$. Une permutation appartenant à $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ fixe chacun de ces indices. Comme elle est bijective, elle envoie leur complémentaire sur lui-même. Réciproquement, toute permutation de ce complémentaire se prolonge de façon unique en fixant les indices imposés. Le complémentaire a $n - k$ éléments : il y a donc $(n - k)!$ possibilités.

$$\text{Card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) = (n - k)!.$$

Les familles d'indices $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ correspondent exactement aux parties à k éléments de E_n , dont le nombre est $\binom{n}{k}$. Chaque terme de la somme définissant s_k est le même. Par conséquent,

$$s_k = \binom{n}{k} (n - k)! = \frac{n!}{k!} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Le cas $k = n$ est inclus : la seule permutation fixant tous les éléments est l'identité, et $0! = 1$.

3. a) Une permutation n'a aucun point fixe si et seulement si elle n'appartient à aucun A_i . Ainsi, $D_{n,0}$ est le complémentaire de leur réunion dans Ω . On applique la formule de Poincaré rappelée dans l'énoncé, puis I.2 :

$$d = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} s_k = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Cette formule vaut également pour $n = 0$ et $n = 1$, avec les conventions du sujet : elle donne respectivement 1 et 0.

- b)** Question adaptée au programme actuel : une indication explicite guide le comptage, et les conventions pour les ensembles de taille 0 ou 1 rendent la formule utilisable jusqu'à $k = n$.

On choisit l'ensemble F des k points fixes, de $\binom{n}{k}$ façons. Pour un tel ensemble fixé, la restriction de la permutation à $E_n \setminus F$ doit être une permutation sans point fixe de cet ensemble ; elle a donc $\text{Card}(D_{n-k,0})$ possibilités. Son prolongement par l'identité sur F est unique. Chaque permutation ayant exactement k points fixes a un unique ensemble F : il n'y a donc aucun double comptage.

$$d_k = \binom{n}{k} \text{Card}(D_{n-k,0}).$$

En utilisant I.3.a avec $n - k$, y compris les cas 0 et 1, on obtient aussi

$$d_k = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

En particulier, $d_n = 1$ et $d_{n-1} = 0$: une permutation ne peut avoir exactement $n - 1$ points fixes.

- c)** On réécrit la formule précédente en fonction des s_j . Pour $0 \leq i \leq n - k$, on a

$$\binom{k+i}{k} s_{k+i} = \frac{(k+i)!}{k!i!} \frac{n!}{(k+i)!} = \frac{n!}{k!i!}.$$

En reportant cette identité terme à terme,

$$d_k = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} s_{k+i} = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} s_j.$$

C'est exactement la relation demandée. Pour $k = n$, la somme se réduit à $d_n = s_n = 1$.

4. La version fournie écrit $d_0 = s_0 = 0$, ce qui est incompatible avec la formule de I.3.a et avec l'inversion demandée. Question adaptée au programme actuel : on rectifie cette ligne en $d_0 = d$ et $s_0 = n!$. Avec ces définitions, la formule de I.3.c reste valable pour $k = 0$, grâce à I.3.a.

- a) Posons les matrices colonnes $D = {}^t(d_0, \dots, d_n)$ et $S = {}^t(s_0, \dots, s_n)$. Les relations donnent $D = MS$, où les lignes et les colonnes sont indexées de 0 à n , et où

$$M_{kj} = \begin{cases} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} & \text{si } k \leq j, \\ 0 & \text{si } k > j. \end{cases}$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \dots & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \dots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La définition par coefficients précise sans ambiguïté la matrice, y compris pour $n = 2$.

- b) Pour identifier l'application linéaire, on regarde les images des vecteurs de la base canonique. Le binôme de Newton donne, pour $0 \leq j \leq n$,

$$(X - 1)^j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} X^k.$$

La colonne j de M est donc la colonne des coefficients de $(X - 1)^j$. Il s'agit de l'application

$$T : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) \longmapsto P(X - 1).$$

La substitution conserve les combinaisons linéaires et n'augmente pas le degré ; T est bien un endomorphisme de cet espace concret.

c) Méthode 1 — Inverser la substitution.

On définit $U(P)(X) = P(X + 1)$. Cette application est également linéaire et conserve $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout polynôme P ,

$$T(U(P))(X) = P((X - 1) + 1) = P(X),$$

$$U(T(P))(X) = P((X + 1) - 1) = P(X).$$

Les deux compositions sont l'identité. Ainsi, T est inversible et

$$T^{-1}(P)(X) = P(X + 1).$$

Méthode 2 — Vérifier directement l'inverse matriciel.

Soit N la matrice triangulaire supérieure définie par $N_{kj} = \binom{j}{k}$ pour $k \leq j$, et $N_{kj} = 0$ sinon. Pour $k \leq j$,

$$(MN)_{kj} = \sum_{r=k}^j (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{j}{r}.$$

En écrivant les factorielles, on vérifie $\binom{r}{k} \binom{j}{r} = \binom{j}{k} \binom{j-k}{r-k}$. Par conséquent,

$$(MN)_{kj} = \binom{j}{k} \sum_{q=0}^{j-k} (-1)^q \binom{j-k}{q}.$$

Si $j = k$, cette somme vaut 1 ; si $j > k$, elle vaut $(1 - 1)^{j-k} = 0$ par le binôme. Les coefficients sous la diagonale sont nuls. On a donc $MN = I_{n+1}$. Le même calcul, en remplaçant le signe $(-1)^{r-k}$ par $(-1)^{j-r}$, donne $NM = I_{n+1}$. Ainsi, $N = M^{-1}$.

La première méthode explique l'inversion par une translation ; la seconde permet de reconnaître et de vérifier une inversion binomiale à partir de ses coefficients.

d) Le binôme de Newton donne les coefficients de $P(X + 1)$: la matrice de T^{-1} est précisément N . En multipliant $D = MS$ par N , on obtient

$$s_k = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} d_j \quad (0 \leq k \leq n).$$

Pour $k = 0$, cela donne

$$n! = \sum_{j=0}^n d_j,$$

conforme à la partition des permutations selon leur nombre de points fixes. Pour $k = n$, on retrouve $s_n = d_n = 1$.

Partie II

Les variables considérées dans cette partie ont un nombre fini de valeurs. Elles admettent donc toutes une espérance et une variance, ce qui permet les calculs de moments ci-dessous.

1. a) Sous la probabilité uniforme sur Ω , l'événement $\{X_n = k\}$ est $D_{n,k}$. Pour $0 \leq k \leq n$, I.3 fournit donc

$$P(X_n = k) = \frac{d_k}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Pour un entier $k < 0$ ou $k > n$, cette probabilité est nulle. La formule inclut $k = 0$, puisque $d_0 = d$, ainsi que $k = n$, pour lequel $P(X_n = n) = 1/n!$. Elle donne $P(X_n = n - 1) = 0$; la valeur $n - 1$ ne fait donc pas partie du support effectif.

b) Méthode 1 — Utiliser la loi et décrire l'ensemble d'indices.

Les $D_{n,k}$, pour $0 \leq k \leq n$, sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω . La somme des probabilités de II.1.a vaut donc 1 :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = 1.$$

Les deux sommes itérées de l'énoncé portent sur le même ensemble fini

$$\{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid k + i \leq n\}.$$

On peut le parcourir d'abord par k , avec $0 \leq i \leq n - k$, ou d'abord par i , avec $0 \leq k \leq n - i$. La commutativité et l'associativité des sommes finies autorisent ce changement d'ordre, sans aucune question de convergence. On obtient ainsi la deuxième somme et sa valeur 1.

Méthode 2 — Regrouper suivant la somme des indices.

Posons $r = k + i$. Les couples d'indices considérés se regroupent selon $0 \leq r \leq n$; pour un tel r , on a $0 \leq i \leq r$ et $k = r - i$. La somme commune devient

$$\sum_{r=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^i}{i!(r-i)!} = \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i}.$$

Pour $r = 0$, la somme intérieure vaut 1. Pour $r \geq 1$, le binôme la rend égale à $(1 - 1)^r = 0$. Le total vaut donc 1.

La première approche exploite l'interprétation probabiliste ; la seconde établit directement l'identité algébrique et peut servir à vérifier une normalisation.

2. Méthode 1 — Compter les gagnants par des indicatrices.

Pour une permutation ω , le produit numéro i est gagnant exactement lorsque $\omega(i) = i$. Chaque indicatrice compte ce gagnant une fois, d'où, pour toute issue,

$$X_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}.$$

La question I.2 avec $k = 1$ donne $P(A_i) = (n-1)!/n! = 1/n$. L'espérance d'une indicatrice étant la probabilité de son événement, la linéarité fournit, sans hypothèse d'indépendance,

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = n \frac{1}{n} = 1.$$

Méthode 2 — Calculer le moment à partir de la loi.

Le transfert pour une variable finie donne

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

En posant $h = k - 1$, les indices vérifient $h + i \leq n - 1$. On les regroupe selon $r = h + i$:

$$E(X_n) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} = 1,$$

par le même calcul binomial qu'en II.1.b. Les indicatrices évitent ce calcul de loi ; la seconde méthode montre comment une somme triangulaire calcule un moment.

3. a) On développe le carré d'une somme finie, en comptant les couples d'indices distincts comme des couples ordonnés :

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_{A_j}.$$

Une indicatrice vérifie $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$, et le produit de deux indicatrices est celle de l'intersection. L'identité demandée en résulte :

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \mathbf{1}_{A_i \cap A_j}.$$

- b) Méthode 1 — Utiliser le second moment.

Pour $i \neq j$, I.2 et l'uniformité donnent $P(A_i \cap A_j) = (n-2)!/n! = 1/[n(n-1)]$. Il y a $n(n-1)$ couples ordonnés distincts. Par linéarité dans II.3.a,

$$E(X_n^2) = n \frac{1}{n} + n(n-1) \frac{1}{n(n-1)} = 2.$$

La formule de Koenig-Huygens et $E(X_n) = 1$ donnent alors

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 2 - 1 = 1.$$

Méthode 2 — Garder les covariances.

Pour chaque i , $V(\mathbf{1}_{A_i}) = (1/n)(1 - 1/n) = (n-1)/n^2$. Pour $i \neq j$,

$$\text{Cov}(\mathbf{1}_{A_i}, \mathbf{1}_{A_j}) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

La variance d'une somme est la somme des variances plus celle des covariances pour les couples ordonnés distincts. Donc

$$V(X_n) = n \frac{n-1}{n^2} + n(n-1) \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

La première méthode suit l'énoncé. La seconde explique pourquoi on ne peut pas additionner seulement les variances : les indicatrices ne sont pas indépendantes, puisque leurs covariances sont strictement positives.

4. a) Question adaptée au programme actuel : la quantité $nb - BX_n$, appelée « coût » dans le PDF, est le résultat net pour l'entreprise. Cette rectification de vocabulaire conserve la formule mais rend l'interprétation économique cohérente.

La vente des n exemplaires rapporte nb euros, tandis que les X_n gagnants reçoivent au total BX_n euros. Par différence,

$$C_n = nb - BX_n.$$

La linéarité de l'espérance et la formule de variance d'une transformation affine donnent

$$E(C_n) = nb - BE(X_n) = nb - B,$$

$$V(C_n) = B^2 V(X_n) = B^2.$$

Comme $B > 0$, on conclut $\sigma(C_n) = B$. Le coût des seuls lots serait BX_n , d'espérance B et d'écart type B ; il ne faut pas le confondre avec C_n .

- b) La décision ne peut pas être fixée sans connaître b , B , n et les objectifs du directeur. Du seul point de vue du résultat moyen étudié, la campagne est favorable lorsque $nb > B$, défavorable lorsque $nb < B$ et neutre lorsque $nb = B$.

Le directeur doit aussi tenir compte de l'écart type B : une espérance positive ne garantit pas un résultat positif à chaque réalisation. Par exemple, l'identité est une permutation possible, de probabilité $1/n!$, et donne $C_n = n(b - B)$. Lorsque $B > b$, cette réalisation entraîne une perte.

Si $b \geq B$, le résultat est en revanche toujours positif ou nul, car $X_n \leq n$ implique $C_n \geq n(b - B) \geq 0$. Ces conclusions concernent le modèle de l'énoncé; le coût de production et l'effet publicitaire ne sont pas chiffrés et ne permettent pas de conclure davantage.

5. Pour un exemplaire de numéro apparent fixé i , posons $Y_n = \mathbf{1}_{A_i}$. Il vaut 1 avec probabilité $1/n$ et 0 avec probabilité $1 - 1/n$: il suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.

L'acheteur paie b dans tous les cas et reçoit B exactement lorsque $Y_n = 1$. Ainsi,

$$G_n = BY_n - b.$$

Il s'agit d'une variable finie, et

$$E(G_n) = BE(Y_n) - b = \frac{B}{n} - b.$$

Ce gain est favorable en moyenne exactement lorsque $B > nb$, condition opposée à celle d'un résultat moyen favorable pour l'entreprise dans ce modèle.

Partie III

1. Méthode 1 — Utiliser la caractérisation ponctuelle des lois entières.

Fixons un entier $k \geq 0$. Pour $n \geq \max(2, k)$, la loi calculée en II.1.a donne

$$P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

La série exponentielle, convergente en -1 , a pour somme e^{-1} . Comme $n - k$ tend vers l'infini,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Pour un entier $k < 0$, $P(X_n = k) = 0$ pour tout n . Ces limites sont les probabilités de la loi de Poisson de paramètre 1. Les variables et la loi limite sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$: la

caractérisation ponctuelle de la convergence en loi du programme s'applique. Ainsi, X_n converge en loi vers une variable Z de loi $\mathcal{P}(1)$.

Méthode 2 — Revenir aux fonctions de répartition.

Pour $x < 0$, les fonctions de répartition de X_n et de Z sont nulles. Pour un réel $x \geq 0$, posons $r = \lfloor x \rfloor$. Dès que $n \geq \max(2, r)$,

$$P(X_n \leq x) = \sum_{k=0}^r P(X_n = k).$$

Cette somme comporte un nombre fixe de termes. Les limites ponctuelles établies par la série exponentielle donnent donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \leq x) = \sum_{k=0}^r \frac{e^{-1}}{k!} = P(Z \leq x).$$

En particulier, la convergence a lieu en tous les points de continuité de la fonction de répartition de Z , ce qui est la définition de la convergence en loi. La première méthode emploie le critère adapté aux lois entières ; la seconde en explique concrètement le lien avec la définition.

2. La série exponentielle en -1 est absolument convergente, puisque

$$\sum_{i \geq 0} 1/i! = e.$$

On peut donc séparer une somme partielle et son reste :

$$e^{-1} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} + \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

En retranchant $e^{-1}/k!$ à la formule de II.1.a,

$$P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} = -\frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Le passage aux valeurs absolues supprime ce signe moins et donne l'égalité demandée.

Le même raisonnement vaut aussi pour $k = 0$; ce cas sera utilisé à la question III.4.

3. Posons $i = m + k$. Pour $k \geq 1$,

$$(m + k)! = m! (m + 1)(m + 2) \cdots (m + k) \geq m! (m + 1)^k.$$

L'inégalité est également vraie pour $k = 0$, avec un produit vide égal à 1. Pour tout entier $N \geq 0$, on a donc

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{(m + k)!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^N \frac{1}{(m + 1)^k}.$$

Comme $m \geq 1$, la raison $1/(m + 1)$ est dans $]0, 1[$. La série géométrique de droite converge; les sommes partielles de gauche, croissantes et majorées, convergent aussi. En passant à la limite,

$$\sum_{i=m}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \frac{1}{1 - 1/(m + 1)} = \frac{1}{m!} \frac{m + 1}{m} \leq \frac{2}{m!}.$$

Cela établit les deux inégalités, sans recourir à un critère général de convergence supplémentaire.

4. Pour chaque $0 \leq k \leq n$, III.2, y compris son cas $k = 0$, puis l'inégalité triangulaire

pour une série absolument convergente et III.3 avec $m = n - k + 1 \geq 1$, donnent

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{2}{k!(n-k+1)!}.$$

On somme ces inégalités finies pour obtenir la première majoration. Ensuite,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)!}.$$

La dernière égalité résulte du binôme de Newton, en retranchant le terme $k = n + 1$ de la somme complète. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \frac{2(2^{n+1} - 1)}{(n+1)!} \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}.$$

La quantité de gauche porte seulement sur $0 \leq k \leq n$. La loi de Poisson possède aussi une probabilité strictement positive au-delà de n ; cette somme ne doit donc pas être présentée comme une somme sur tous les entiers.

5. Code adapté en Python. Le code complet étudié est :

Python

```
eps = 0.00001
x = 2
k = 2
while x > eps / 2:
    x = x * (2 / k)
    k = k + 1
print(k)
```

Il n'utilise aucune bibliothèque et ne nécessite aucun import. `eps` est la tolérance ; `x`

contient le terme successif de la suite étudiée et k son indice décalé. Le test est effectué avant chaque passage dans la boucle. Ce code a été exécuté : il affiche 14.

- a) Après j passages, les facteurs utilisés successivement sont $2/2, 2/3, \dots, 2/(j+1)$. Par conséquent,

$$x = 2 \prod_{r=2}^{j+1} \frac{2}{r} = \frac{2^{j+1}}{(j+1)!}.$$

Il s'agit de la valeur au test suivant, et donc à l'entrée du passage suivant si le test est encore vrai. On a également $k = j + 2$. La formule reste valable pour $j = 0$, puisque la valeur initiale est 2.

- b) Tous les u_n sont strictement positifs et, pour $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{3} < 1.$$

La suite est donc strictement décroissante. En itérant cette majoration,

$$0 < u_n \leq u_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Le majorant géométrique tend vers 0 ; par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- c) Après $j \geq 1$ passages, la variable x vaut u_j d'après III.5.a. Puisque u_j tend vers 0 et que $\text{eps}/2 > 0$, il existe un entier J tel que $u_J \leq \text{eps}/2$. Le test devient donc faux au plus tard après J passages : la boucle se termine.

- d) L'invariant à chaque test est

$$k = j + 2, \quad x = \frac{2^{j+1}}{(j+1)!},$$

où j est le nombre de passages déjà effectués. Pour $j \geq 1$, on a $x = u_j$. La sortie $k = 14$ signifie donc que $j = 12$ est le premier indice pour lequel $u_j \leq \text{eps}/2$.

En effet,

$$u_{11} = \frac{2^{12}}{12!} \simeq 8,55112 \times 10^{-6} > 5 \times 10^{-6},$$

$$u_{12} = \frac{2^{13}}{13!} \simeq 1,31556 \times 10^{-6} < 5 \times 10^{-6}.$$

L'inégalité III.4 s'écrit avec la borne $2u_n$. Ainsi, dès que $n \geq 12$, elle garantit

$$\sum_{r=0}^n \left| P(X_n = r) - \frac{e^{-1}}{r!} \right| \leq 2u_n \leq 10^{-5}.$$

La valeur 14 est l'indice de sortie du programme; le seuil pour n fourni par cette majoration est $14 - 2 = 12$. Ce seuil est le premier garanti par cette borne, sans prétendre être le premier seuil possible pour l'erreur réelle. L'état final calculé est $x \simeq 1,31556 \times 10^{-6}$ et $k = 14$.

Partie IV

Le domaine $1 \leq \ell \leq n$ est précisé dans le sujet : on achète ℓ exemplaires distincts parmi les n disponibles. Les variables considérées sont finies et admettent leurs moments d'ordre 1 et 2.

1. Pour chaque issue, $\mathbf{1}_{A_{j_i}}$ vaut 1 exactement si le i -ième exemplaire acheté est gagnant. Leur somme compte donc exactement les exemplaires gagnants parmi les achats :

$$Y_n^\ell = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{A_{j_i}}.$$

Chaque événement A_{j_i} a la probabilité $1/n$. La linéarité de l'espérance, sans supposer ces événements indépendants, donne

$$E(Y_n^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} P(A_{j_i}) = \frac{\ell}{n}.$$

On retrouve $E(X_n) = 1$ pour $\ell = n$.

2. a) En développant le carré de la somme de IV.1,

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{A_{j_i}}^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, k \leq \ell \\ i \neq k}} \mathbf{1}_{A_{j_i}} \mathbf{1}_{A_{j_k}}.$$

Comme précédemment, $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cap B}$. On obtient donc

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{A_{j_i}} + \sum_{\substack{1 \leq i, k \leq \ell \\ i \neq k}} \mathbf{1}_{A_{j_i} \cap A_{j_k}}.$$

Lorsque $\ell = 1$, la deuxième somme est vide et vaut 0.

b) Méthode 1 — Passer par le second moment.

Les numéros $j_1, \dots, j_\ell$ sont distincts. Pour $i \neq k$, on a donc $P(A_{j_i} \cap A_{j_k}) = 1/[n(n-1)]$. Il y a $\ell(\ell-1)$ couples ordonnés d'indices distincts. D'après IV.2.a,

$$E((Y_n^\ell)^2) = \frac{\ell}{n} + \frac{\ell(\ell-1)}{n(n-1)}.$$

On soustrait le carré de l'espérance :

$$V(Y_n^\ell) = \frac{\ell}{n} + \frac{\ell(\ell-1)}{n(n-1)} - \frac{\ell^2}{n^2} = \frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n^2(n-1)}.$$

Toutes les divisions sont licites puisque $n \geq 2$.

Méthode 2 — Utiliser les covariances déjà calculées.

D'après II.3.b, chaque indicatrice a pour variance $(n-1)/n^2$ et deux indicatrices distinctes ont pour covariance $1/[n^2(n-1)]$. En les additionnant avec les couples

ordonnés,

$$V(Y_n^\ell) = \ell \frac{n-1}{n^2} + \ell(\ell-1) \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

La mise au même dénominateur donne

$$V(Y_n^\ell) = \frac{\ell((n-1)^2 + \ell - 1)}{n^2(n-1)} = \frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n^2(n-1)}.$$

La première méthode suit le développement demandé ; la seconde réutilise la dépendance entre les indicatrices et évite de recalculer le second moment. Pour $\ell = 1$, le résultat est $(n-1)/n^2$, variance d'une Bernoulli de paramètre $1/n$; pour $\ell = n$, il vaut 1, variance de X_n .

3. a) L'achat des ℓ exemplaires coûte $b\ell$ euros. Chacun des Y_n^ℓ exemplaires gagnants rapporte B euros. Le gain net est donc

$$G_n = BY_n^\ell - b\ell.$$

- b) Par linéarité et par la règle de variance d'une transformation affine,

$$E(G_n) = B \frac{\ell}{n} - b\ell = \ell \left(\frac{B}{n} - b \right),$$

$$V(G_n) = B^2 \frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n^2(n-1)}.$$

Comme $B > 0$, l'écart type vaut

$$\sigma(G_n) = \frac{B}{n} \sqrt{\frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n-1}}.$$

Le radicand est strictement positif pour $n \geq 2$ et $\ell \geq 1$: $n^2 - 2n + \ell = n(n-2) + \ell > 0$. Aucune ambiguïté ne subsiste sur la racine carrée.

- c) Le gain moyen par exemplaire est

$$\frac{E(G_n)}{\ell} = \frac{B}{n} - b.$$

Acheter davantage ne modifie donc pas l'intérêt moyen de chaque achat. Si $B < nb$, chaque exemplaire supplémentaire augmente la perte moyenne ; si $B > nb$, il augmente

le gain moyen ; si $B = nb$, le gain moyen reste nul quel que soit ℓ . Dans les deux premiers cas, les comparaisons portent sur l'espérance et ne constituent pas une garantie individuelle.

Le risque absolu augmente avec le nombre d'exemplaires. En effet, en posant $a = n^2 - 2n \geq 0$, la variance est proportionnelle à $\ell(a + \ell)$, et

$$(\ell + 1)(a + \ell + 1) - \ell(a + \ell) = a + 2\ell + 1 > 0.$$

Le risque par exemplaire suit une évolution différente :

$$V\left(\frac{G_n}{\ell}\right) = \frac{B^2}{n^2(n-1)} \left(1 + \frac{n(n-2)}{\ell}\right).$$

Cette quantité décroît strictement avec ℓ si $n > 2$; pour $n = 2$, elle est constante. L'achat de plusieurs exemplaires réduit donc la dispersion du gain moyen par exemplaire lorsque $n > 2$, mais augmente l'engagement financier et le risque absolu. Il n'améliore pas l'espérance par exemplaire et ne rend pas rentable en moyenne une opération qui ne l'était pas. Sans valeurs numériques ni critère de préférence face au risque, aucune recommandation universelle supplémentaire ne peut être donnée.

Relevé des adaptations

- I.3, I.3.b : définition de $D_{m,0}$ pour $m = 0$ et $m = 1$, avec $\text{Card}(D_{0,0}) = 1$ et $\text{Card}(D_{1,0}) = 0$, nécessaire aux cas $k = n$ et $k = n - 1$; ajout d'une indication de comptage par choix de l'ensemble des points fixes. La notation fautive $\text{Card}(d_{n-k,0})$ du PDF est rectifiée en $\text{Card}(D_{n-k,0})$.
- I.4.a à I.4.d : rectification de $d_0 = s_0 = 0$ en $d_0 = d$ et $s_0 = n!$. La ligne du PDF ne permet pas l'inversion annoncée ; les définitions rectifiées prolongent les identités précédentes et donnent l'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X - 1)$.
- II.1.a à II.5 : explicitation des conditions $b > 0$, $B > 0$, des numéros apparents tous distincts et de la vente de tous les exemplaires ; le modèle est rendu explicite pour les calculs de recettes et de gains. La quantité $nb - BX_n$ est nommée résultat net, car le terme « coût » du PDF inverse son interprétation économique. Les coûts de

production, absents du sujet, ne sont pas inventés.

- III.5.a à III.5.d : Code adapté en Python, avec explication de l’affichage. Le comportement des affectations et de la boucle est conservé. La valeur 14, déjà rectifiée dans le PDF fourni, est conservée ; son décalage de deux unités par rapport au seuil $n = 12$ est expliqué.
- IV.1 à IV.3.c : précision $1 \leq \ell \leq n$ et caractère distinct des exemplaires, nécessaires au comptage des paires et au sens du modèle.