



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2003

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Définitions et notations

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

φ est la fonction définie sur $]0, 1]$ par $\varphi(x) = -\frac{\ln x}{\ln 2}$.

Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i(A) = \varphi(P(A))$.

h est la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$h(0) = 0, \quad h(x) = -\frac{x \ln x}{\ln 2} \text{ pour } x \in]0, 1].$$

Pour une variable aléatoire discrète X , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs réelles, on pose, sous réserve d'existence,

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x)).$$

Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les éléments sont distincts, alors $H(X)$ existe et, en notant $p_k = P(X = x_k)$, on a

$$H(X) = \sum_{k=1}^n h(P(X = x_k)) = \sum_{k=1}^n h(p_k).$$

En théorie de l'information, $i(A)$ est appelé incertitude de l'événement A et $H(X)$ incertitude moyenne, ou entropie, de X .

Partie I. Incertitude des événements

I.1) On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement «la carte tirée est la dame de cœur». Que valent $P(A)$ et $i(A)$?

I.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée. A est l'événement «obtenir n fois PILE». Préciser $i(A)$.

I.3) Vérifier les points suivants.

- (i) Pour un événement Ω' quasi certain, $i(\Omega') = 0$.
- (ii) Si A et l'événement contraire $\bar{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$.
- (iii) Si A et B sont indépendants pour la probabilité P et si $P(A \cap B) \neq 0$, alors $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.

I.4) Préciser $i(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ quand les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants et $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$. En déduire une nouvelle démonstration de I.2).

I.5) Soient A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.

I.6) Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

Partie II. Incertitude d'une variable aléatoire discrète

II.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$, que vaut $H(U_n)$?

II.2) Si on suppose $P(Z = 1) = 1/4$, $P(Z = 2) = 1/4$ et $P(Z = 3) = 1/2$, que vaut $H(Z)$? Comparer $H(Z)$ et $H(U_3)$.

II.3) On se propose de simuler informatiquement une variable aléatoire. La commande `randint(a, b)`, importée depuis `numpy.random`, renvoie un entier choisi uniformément parmi les entiers de a inclus à b exclu ; les tirages successifs sont indépendants.

Python

```
from numpy.random import randint

ini = randint(1, 4)

if ini == 3:
    y = randint(1, 3)
else:
    y = 3
```

On appelle Y le contenu de `y` après exécution du programme. Donner la loi de Y ,

calculer son espérance $E(Y)$ et son incertitude $H(Y)$.

II.4) Vérifier que h est continue et positive sur $[0, 1]$. Est-elle dérivable en 0? Étudier h et dessiner sa courbe représentative.

II.5) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini. Montrer que $H(X) \geq 0$, avec égalité si et seulement si X est quasi certaine, c'est-à-dire constante avec probabilité 1.

Partie III. Maximalité de l'entropie

III.1) Étude pour $n = 2$.

Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_2(x) = h(x) + h(1 - x)$.

a) Pour $x \in [0, 1]$, on a $h_2(x) = h_2(1 - x)$. Que signifie ce résultat quant à la courbe de h_2 dans un repère orthonormé?

b) Étudier h_2 et donner son graphe.

c) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que $H(X) \leq 1$, avec égalité si et seulement si $p = 1/2$.

III.2) Étude pour $n = 3$.

a) Soit O l'ensemble des $(x, y) \in]0, 1[^2$ vérifiant $1 - x - y > 0$ et h_3 la fonction définie sur O par

$$h_3(x, y) = h(x) + h(y) + h(1 - x - y).$$

On admet que O est un ouvert. Montrer que h_3 admet au plus un extremum sur O .

b) Justifier par un argument de convexité l'inégalité

$$\forall u > 0, \quad \ln u \leq u - 1. \quad (1)$$

Dans la suite, on pourra utiliser sans démonstration que $\ln u = u - 1$ si et seulement si $u = 1$.

c) En déduire que h_3 admet un maximum global sur O . On pourra utiliser (1) pour $1/(3x)$ et pour $1/(3y)$, entre autres.

d) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, x_2, x_3\}$. Montrer que $H(X) \leq \ln 3 / \ln 2$, avec égalité si et seulement si X suit la loi uniforme sur $\{x_1, x_2, x_3\}$.

III.3) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On pose $p_k = P(X = x_k)$.

a) Dans cette question, on suppose que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p_k > 0$. En utilisant (1) pour les $1/(np_k)$, montrer que $H(X) \leq \ln n / \ln 2$, avec égalité si et seulement si X suit la loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

b) Vérifier que la conclusion du a) est encore vraie en supprimant la condition « $p_k > 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ».

III.4) Soient $p \in]0, 1[$ et G une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . On pose $m = E(G)$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = P(G = k)$.

a) Rappeler la valeur de m , montrer que $H(G)$ existe et la calculer.

b) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $E(X) = m$ et $H(X)$ existe. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_k = P(X = k)$ et on suppose $q_k > 0$.

En utilisant (1), vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$q_k \ln p + (k-1)q_k \ln(1-p) - q_k \ln q_k \leq p_k - q_k,$$

et établir $H(X) \leq H(G)$, avec égalité si et seulement si X suit la même loi que G .

Partie IV. Incertitude d'une variable aléatoire continue

Dans cette partie, on prolonge h à $[0, +\infty[$ en posant toujours $h(0) = 0$ et $h(u) = -u \ln u / \ln 2$ pour tout $u > 0$.

Pour une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points et ayant des limites latérales finies en tout point réel, on dit que X admet une incertitude quand l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x)) dx$ converge.

Dans ce cas, la valeur $H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x)) dx$ est appelée incertitude de X .

IV.1) Cas des lois normales.

- a) Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que $H(Y_0)$ existe et calculer $H(Y_0)$.
- b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma > 0$. Montrer que $H(Y)$ existe et calculer $H(Y)$.

IV.2) Soient $\lambda > 0$ et X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . On désignera par f_0 la densité de X_0 .

- a) Montrer que $H(X_0)$ existe et calculer $H(X_0)$ en fonction de λ .
- b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, admettant une densité f . On suppose que $H(X)$ existe et que X admet une espérance égale à $1/\lambda$. Montrer que

$$H(X_0) = -\frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} f(x) \ln(f_0(x)) dx.$$

En utilisant (1), montrer que $H(X) \leq H(X_0)$.