



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2003

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I. Incertitude des événements

I.1) Le tirage est uniforme parmi les 32 cartes et une seule carte est la dame de cœur.

Ainsi $P(A) = 1/32$. La définition donne

$$i(A) = -\frac{\ln(1/32)}{\ln 2} = \frac{\ln(2^5)}{\ln 2} = 5.$$

I.2) Les lancers successifs sont indépendants et chacun donne PILE avec probabilité $1/2$.

Par multiplication des probabilités,

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n}.$$

Cette probabilité est non nulle, donc $i(A) = -\ln(2^{-n})/\ln 2 = n$.

I.3) (i) Un événement quasi certain a pour probabilité 1. Ainsi $i(\Omega') = -\ln 1/\ln 2 = 0$.

(ii) Les événements A et $\bar{A}$ sont complémentaires. Leur équiprobabilité entraîne

$$2P(A) = P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ donc } P(A) = 1/2 \text{ et } i(A) = 1.$$

(iii) L'indépendance donne $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Puisque le produit est strictement positif, les deux facteurs le sont et tous les logarithmes suivants sont définis. Ainsi

$$i(A \cap B) = -\frac{\ln(P(A)P(B))}{\ln 2} = -\frac{\ln P(A)}{\ln 2} - \frac{\ln P(B)}{\ln 2} = i(A) + i(B).$$

I.4) La mutuelle indépendance donne

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k) > 0.$$

Chaque facteur est donc strictement positif. En prenant le logarithme du produit, on obtient

$$i\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n i(A_k).$$

Pour retrouver I.2), on prend $A_k = \text{«le } k\text{-ième lancer donne PILE»}$. Ces événements sont mutuellement indépendants et $i(A_k) = 1$. Leur intersection est l'événement A de I.2), d'où

$$i(A) = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

I.5) L'inclusion donne $0 < P(A) \leq P(B) \leq 1$. La fonction logarithme est croissante et $\ln 2 > 0$, donc

$$-\frac{\ln P(A)}{\ln 2} \geq -\frac{\ln P(B)}{\ln 2}.$$

Par conséquent $i(A) \geq i(B)$. L'égalité a lieu si et seulement si $P(A) = P(B)$; elle n'impose pas l'égalité ensembliste des événements.

I.6) Comme $\ln x \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et $\ln 2 > 0$, on a $\varphi(x) \rightarrow +\infty$. L'incertitude attribuée à un événement croît donc sans borne quand sa probabilité tend vers zéro. L'expression $i(A)$ n'est cependant définie ici que lorsque $P(A) > 0$.

Partie II. Incertitude d'une variable aléatoire discrète

II.1) Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(U_n = k) = 1/n$. La somme est finie et

$$H(U_n) = n \left(-\frac{1}{n} \frac{\ln(1/n)}{\ln 2} \right) = \frac{\ln n}{\ln 2}.$$

En particulier, si $n = 1$, la variable est constante et cette formule donne $H(U_1) = 0$.

II.2) La loi est de support fini; son entropie existe et vaut

$$H(Z) = -\frac{2(1/4) \ln(1/4) + (1/2) \ln(1/2)}{\ln 2} = \frac{3}{2}.$$

Or $H(U_3) = \ln 3 / \ln 2$. Pour comparer sans arrondi, $\ln 3 / \ln 2 > 3/2$ équivaut à $2 \ln 3 > 3 \ln 2$, soit $\ln 9 > \ln 8$, ce qui est vrai. Ainsi $H(Z) < H(U_3)$.

II.3) Code adapté en Python. Le programme complet est le suivant.

Python

```
from numpy.random import randint

ini = randint(1, 4)

if ini == 3:
    y = randint(1, 3)
else:
    y = 3
```

La variable `ini` est uniforme sur $\{1, 2, 3\}$. Si elle vaut 3, le second tirage indépendant est uniforme sur $\{1, 2\}$; sinon `y` vaut 3. Par probabilités composées,

$$P(Y = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \quad P(Y = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(Y = 3) = \frac{2}{3}.$$

Ces trois probabilités ont pour somme 1. Comme Y est bornée, son espérance existe et

$$E(Y) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{2}.$$

Son entropie existe également et vaut

$$H(Y) = -\frac{2(1/6) \ln(1/6) + (2/3) \ln(2/3)}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} - \frac{1}{3}.$$

Le code a été exécuté; les bornes exclusives des deux appels sont celles indiquées dans le sujet. Une exécution donne un tirage de cette loi et ne démontre pas les probabilités calculées ci-dessus.

II.4) Sur $]0, 1]$, la fonction h est continue par opérations usuelles. La croissance comparée $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 = h(0)$; h est donc continue sur $[0, 1]$. Pour $0 < x \leq 1$, $\ln x \leq 0$, donc $h(x) \geq 0$. Avec $h(0) = 0$, elle est positive au sens large sur tout l'intervalle, et strictement positive sur $]0, 1[$.

Le taux d'accroissement en zéro est

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = -\frac{\ln x}{\ln 2} \rightarrow +\infty.$$

Il n'existe donc pas de dérivée à droite finie en 0 : la courbe présente une demi-tangente verticale en ce point.

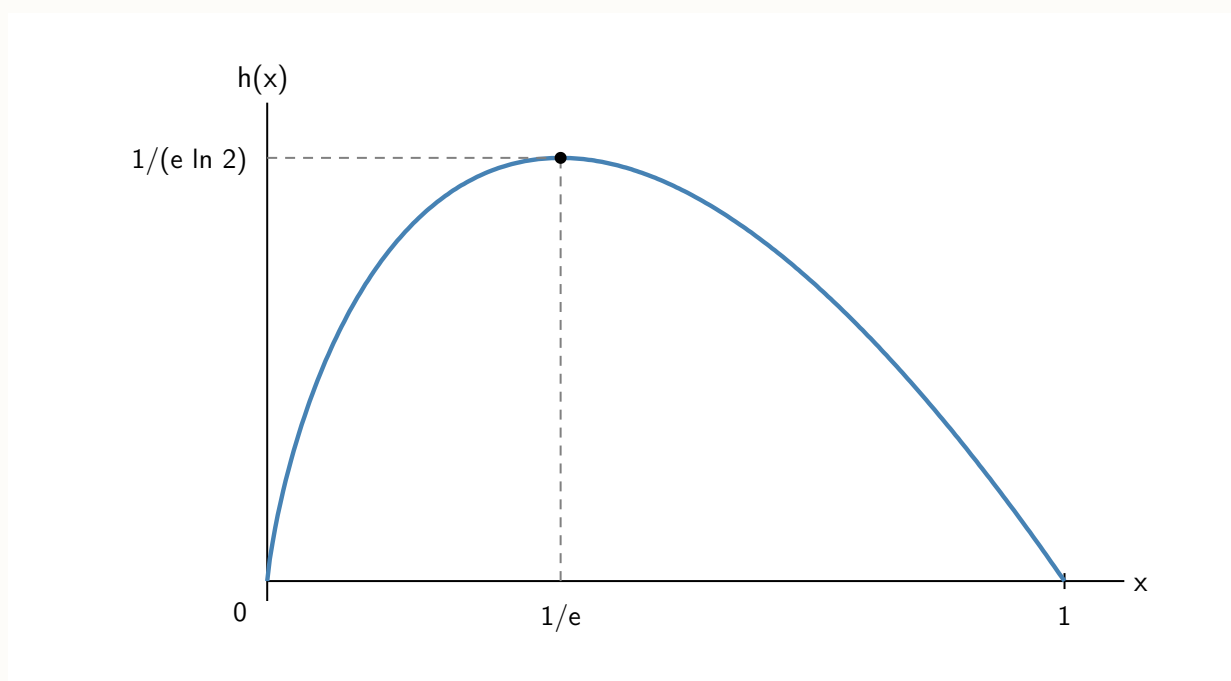
Pour $x \in]0, 1[$,

$$h'(x) = -\frac{\ln x + 1}{\ln 2}, \quad h''(x) = -\frac{1}{x \ln 2} < 0.$$

La dérivée s'annule en $x = e^{-1}$, est positive avant et négative après. Ainsi h croît strictement sur $[0, e^{-1}]$, puis décroît strictement sur $[e^{-1}, 1]$. Son maximum est

$$h(e^{-1}) = \frac{1}{e \ln 2}.$$

Les valeurs aux bornes sont $h(0) = h(1) = 0$ et h est concave. La dérivée à gauche en 1 vaut $-1/\ln 2$. Le tracé suivant est calculé à partir de la formule de h .



II.5) Écrivons la loi de X sur l'ensemble fini de ses valeurs possibles sous la forme $(p_1, \dots, p_r)$. Chaque p_k appartient à $[0, 1]$; par II.4), chaque $h(p_k)$ est positif ou nul. Ainsi

$$H(X) = \sum_{k=1}^r h(p_k) \geq 0.$$

Si $H(X) = 0$, la somme de termes positifs ou nuls est nulle, donc $h(p_k) = 0$ pour tout k .

D'après II.4), les seuls zéros de h sur $[0, 1]$ sont 0 et 1. Comme

$$\sum_{k=1}^r p_k = 1,$$

exactement une des probabilités vaut 1 et les autres valent 0. Il existe donc une valeur a telle que $P(X = a) = 1$: X est quasi certaine.

Réciproquement, si $P(X = a) = 1$, toutes les probabilités de sa loi sont 0 ou 1, et chaque terme de l'entropie est nul. Ainsi $H(X) = 0$ si et seulement si X est constante avec probabilité 1.

Partie III. Maximalité de l'entropie

III.1) a) Les abscisses x et $1 - x$ sont symétriques par rapport à $1/2$ et leurs ordonnées par h_2 sont égales. La courbe représentative de h_2 est donc symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = 1/2$.

b) La continuité de h sur $[0, 1]$ entraîne celle de h_2 . On a $h_2(0) = h_2(1) = 0$. Pour $x \in]0, 1[$, la règle de dérivation d'une composée donne

$$h'_2(x) = h'(x) - h'(1-x) = \frac{\ln(1-x) - \ln x}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{1-x}{x} \right).$$

Cette dérivée est positive si $x < 1/2$, nulle si $x = 1/2$ et négative si $x > 1/2$. Ainsi h_2 croît strictement de 0 à 1 sur $[0, 1/2]$, puis décroît strictement de 1 à 0 sur $[1/2, 1]$, car

$$h_2(1/2) = 2h(1/2) = 1.$$

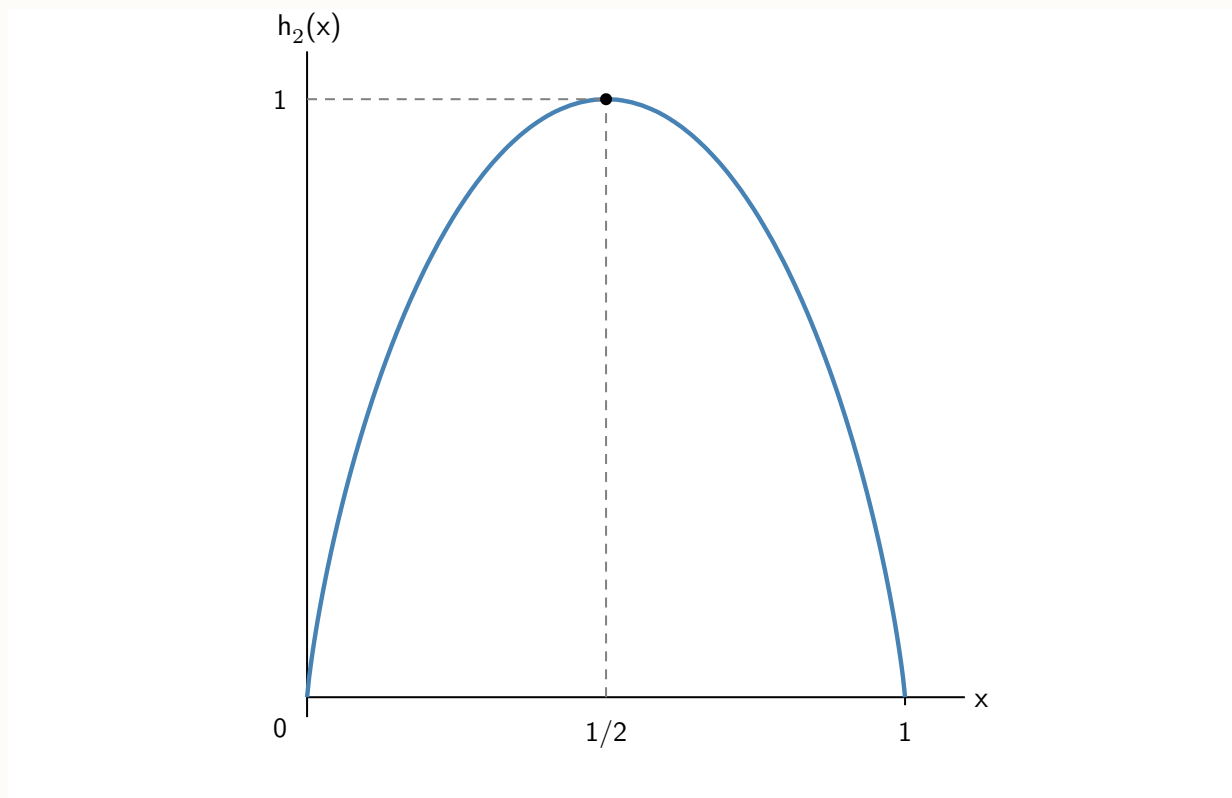
De plus,

$$h''_2(x) = -\frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x(1-x) \ln 2} < 0.$$

La courbe est concave et a une tangente horizontale en son maximum. Pour déterminer la demi-tangente en zéro sans supposer un théorème de prolongement de la dérivée, on écrit directement

$$\frac{h_2(x) - h_2(0)}{x} = -\frac{\ln x}{\ln 2} - \frac{1-x}{\ln 2} \frac{\ln(1-x)}{x} \rightarrow +\infty,$$

car $\ln(1-x)/x \rightarrow -1$ par dérivabilité du logarithme en 1. La symétrie de a) donne une pente tendant vers $-\infty$ pour la demi-tangente en 1. Les demi-tangentes aux extrémités sont donc verticales. Les unités sont identiques sur les deux axes du tracé suivant, calculé à partir de h_2 .



- c) Pour une Bernoulli de paramètre p , les probabilités des valeurs 1 et 0 sont p et $1-p$. Ainsi $H(X) = h(p) + h(1-p) = h_2(p)$. La question précédente donne $H(X) \leq 1$, avec égalité si et seulement si $p = 1/2$.

III.2) a) Posons $z = 1 - x - y$. Sur l'ouvert O , les trois nombres x, y, z sont strictement positifs. Comme h est de classe C^∞ sur $]0, 1[$, h_3 est de classe C^2 sur O . Son gradient est

$$\nabla h_3(x, y) = \frac{1}{\ln 2} \begin{pmatrix} \ln(z/x) \\ \ln(z/y) \end{pmatrix}.$$

Tout extremum local sur l'ouvert O doit être un point critique. Le gradient est nul si et seulement si $z = x$ et $z = y$. Puisque $x + y + z = 1$, le seul point critique possible est

$$C = (1/3, 1/3).$$

Il appartient à O , et aucun autre point de O ne peut être un extremum. Cela démontre l'assertion « au plus un ».

On peut préciser la nature locale en calculant la hessienne :

$$\nabla^2 h_3(x, y) = -\frac{1}{\ln 2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 h_3(C) = -\frac{3}{\ln 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La multiplication par les vecteurs $(1, 1)^\top$ et $(1, -1)^\top$ donne respectivement les valeurs propres $-9/\ln 2$ et $-3/\ln 2$. Ces vecteurs sont indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^2$, ce sont donc toutes les valeurs propres ; elles sont strictement négatives. Le critère hessien, applicable à la fonction C^2 sur l'ouvert O , montre que C est un maximum local strict. La question c) établira son caractère global.

b) Méthode 1 — Concavité du logarithme.

La fonction $u \mapsto \ln u$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée seconde vaut $-1/u^2 < 0$. Elle est donc concave. Sa courbe est située au-dessous de sa tangente en $u = 1$, dont l'équation est $y = \ln 1 + (u - 1)/1 = u - 1$. Ainsi $\ln u \leq u - 1$ pour tout $u > 0$, comme demandé par l'argument de convexité.

Méthode 2 — Étude de la différence.

Pour préciser directement le signe et le cas d'égalité, posons $v(u) = u - 1 - \ln u$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est $v'(u) = (u - 1)/u$, négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$. La fonction atteint son unique minimum en 1, de valeur $v(1) = 0$. Ainsi $v(u) \geq 0$, avec égalité seulement en 1, donc $\ln u \leq u - 1$, avec égalité si et seulement si $u = 1$.

La première approche applique la propriété des tangentes d'une fonction concave, utile pour produire des inégalités. La seconde étudie la différence, ce qui permet également de vérifier le cas d'égalité par le signe d'une dérivée.

- c) Soit $(x, y) \in O$ et $z = 1 - x - y > 0$. Les nombres $1/(3x)$, $1/(3y)$ et $1/(3z)$ sont strictement positifs, donc (1) donne

$$x \ln \left(\frac{1}{3x} \right) \leq \frac{1}{3} - x, \quad y \ln \left(\frac{1}{3y} \right) \leq \frac{1}{3} - y, \quad z \ln \left(\frac{1}{3z} \right) \leq \frac{1}{3} - z.$$

Les facteurs x, y, z sont positifs ; les multiplications respectent donc les inégalités. En sommant et en utilisant $x + y + z = 1$, on obtient

$$-\ln 3 - x \ln x - y \ln y - z \ln z \leq 0.$$

Puisque $\ln 2 > 0$, il en résulte $h_3(x, y) \leq \ln 3 / \ln 2$. Pour $x = y = z = 1/3$, l'égalité est vérifiée et ce point appartient à O . Le maximum global est donc $\ln 3 / \ln 2$, atteint en $C = (1/3, 1/3)$.

L'égalité dans la somme exige l'égalité dans chacune des trois inégalités, puisque les écarts sont positifs ou nuls. D'après le cas d'égalité de (1), elle impose $1/(3x) = 1/(3y) = 1/(3z) = 1$. Ainsi ce maximum global est unique.

- d) Posons $p_k = P(X = x_k)$ pour $k = 1, 2, 3$. Si les trois probabilités sont strictement positives, $(p_1, p_2) \in O$ et $p_3 = 1 - p_1 - p_2$, donc c) donne $H(X) = h_3(p_1, p_2) \leq \ln 3 / \ln 2$. L'égalité impose $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

S'il n'y a qu'une probabilité non nulle, elle vaut 1 et $H(X) = 0 < \ln 3 / \ln 2$. S'il y en a

exactement deux, elles valent r et $1 - r$, avec $0 < r < 1$. La troisième contribue pour $h(0) = 0$ et III.1 donne $H(X) = h_2(r) \leq 1 < \ln 3 / \ln 2$, puisque $3 > 2$.

La borne vaut donc dans tous les cas, et l'égalité caractérise exactement la loi uniforme sur les trois valeurs.

III.3) a) Les nombres p_k sont strictement positifs et leur somme vaut 1. Pour chaque k , (1) appliquée à $1/(np_k)$ et multipliée par p_k donne

$$p_k \ln \left(\frac{1}{np_k} \right) \leq \frac{1}{n} - p_k.$$

La somme de droite vaut $1 - 1 = 0$, tandis que celle de gauche vaut

$$-\ln n - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k.$$

Ainsi

$$H(X) = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k \leq \frac{\ln n}{\ln 2}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si chacun des écarts positifs ou nuls est nul. Le cas d'égalité de (1) impose $1/(np_k) = 1$ pour tout k , soit $p_k = 1/n$. Réciproquement, cette loi uniforme a bien l'entropie $\ln n / \ln 2$ d'après II.1).

b) Soit r le nombre de probabilités strictement positives parmi $p_1, \dots, p_n$. On a $1 \leq r \leq n$ car leur somme vaut 1. Les probabilités nulles contribuent pour $h(0) = 0$.

Si $r = 1$, $H(X) = 0 < \ln n / \ln 2$, car $n \geq 2$. Si $r \geq 2$, on applique a) aux r valeurs de probabilité non nulle et l'on obtient

$$H(X) \leq \frac{\ln r}{\ln 2} \leq \frac{\ln n}{\ln 2}.$$

Si $r < n$, la seconde inégalité est stricte par stricte croissance du logarithme. L'égalité avec $\ln n / \ln 2$ exige donc $r = n$, puis a) impose $p_k = 1/n$ pour chaque k . La réciproque est déjà établie. La conclusion de a) reste ainsi valable sans l'hypothèse de positivité de toutes les probabilités.

III.4) a) Posons $q = 1 - p \in]0, 1[$. La loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ donne $p_k = pq^{k-1}$ et $m = E(G) = 1/p$.

On a $\ln p_k = \ln p + (k-1) \ln q$. Les termes de l'entropie sont positifs ou nuls et

$$|p_k \ln p_k| = p_k(-\ln p) + (k-1)p_k(-\ln q).$$

La première série a pour somme $-\ln p$, car

$$\sum_{k \geq 1} p_k = 1.$$

La seconde converge puisque

$$\sum_{k \geq 1} (k-1)p_k = E(G) - 1 = q/p < +\infty.$$

La série définissant $H(G)$ converge donc. Par linéarité des séries convergentes,

$$H(G) = -\frac{\ln p + (m-1) \ln q}{\ln 2} = -\frac{\ln p + \frac{1-p}{p} \ln(1-p)}{\ln 2}.$$

On peut aussi écrire $H(G) = h_2(p)/p$, en multipliant numérateur et dénominateur de l'expression précédente par p .

b) Les nombres $p_k = p(1-p)^{k-1}$ et q_k sont tous strictement positifs. On peut donc appliquer (1) à $u = p_k/q_k$ puis multiplier par $q_k > 0$:

$$q_k \ln(p_k/q_k) \leq p_k - q_k.$$

En développant $\ln p_k = \ln p + (k-1) \ln(1-p)$, on retrouve exactement

$$q_k \ln p + (k-1)q_k \ln(1-p) - q_k \ln q_k \leq p_k - q_k.$$

Pour sommer rigoureusement, on commence par les indices $1 \leq k \leq N$. Lorsque

$N \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{k=1}^N q_k \rightarrow 1$$

et

$$\sum_{k=1}^N p_k \rightarrow 1.$$

Comme X est positive et $E(X) = m < +\infty$, la série

$$\sum (k-1)q_k$$

converge et a pour somme $m-1$. Enfin $H(X)$ existe par hypothèse, donc

$$\sum q_k \ln q_k = -\ln 2 H(X)$$

converge. Le passage à la limite dans les sommes finies donne

$$\ln p + (m-1) \ln(1-p) + \ln 2 H(X) \leq 0.$$

La question a) identifie le premier membre à $\ln 2 (H(X) - H(G))$. Comme $\ln 2 > 0$, on conclut $H(X) \leq H(G)$.

Pour le cas d'égalité, posons

$$\delta_k = p_k - q_k - q_k \ln(p_k/q_k) \geq 0.$$

Les mêmes calculs montrent que

$$\sum_{k \geq 1} \delta_k = \ln 2 (H(G) - H(X)).$$

Si les entropies sont égales, cette série positive a une somme nulle, donc chaque $\delta_k = 0$. Le cas d'égalité de (1), appliqué à p_k/q_k , donne alors $p_k = q_k$ pour tout k . Ainsi X suit la même loi que G . Réciproquement, des lois égales ont les mêmes termes dans leur entropie, donc les entropies sont égales.

Partie IV. Incertitude d'une variable aléatoire continue

Question adaptée au programme actuel. Le prolongement de h à $[0, +\infty[$ rend $h(f(x))$ défini même lorsque $f(x) > 1$, ce qui peut se produire pour une densité normale ou exponentielle. La condition sur les limites latérales des densités conserve le cadre du programme. Sur $]0, +\infty[$, on utilise toujours $h(u) = -u \ln u / \ln 2$, avec la valeur $h(0) = 0$ obtenue par continuité.

IV.1) a) La densité de Y_0 est $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. Son logarithme vaut

$$\ln \phi(x) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{x^2}{2}.$$

Ainsi

$$h(\phi(x)) = \frac{\phi(x)}{2 \ln 2} (\ln(2\pi) + x^2).$$

Cette fonction est positive et son intégrale est finie : $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$ et

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \phi(x) dx = E(Y_0^2) = V(Y_0) + E(Y_0)^2 = 1, \text{ les moments de la loi normale étant finis.}$$

L'entropie existe donc, et

$$H(Y_0) = \frac{\ln(2\pi) + 1}{2 \ln 2} = \frac{\ln(2\pi e)}{2 \ln 2}.$$

b) Méthode 1 — Moments de la loi normale.

La densité est $f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$. Comme $\sigma > 0$, elle est strictement positive, et

$$-\ln f_Y(x) = \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}.$$

Pour justifier d'abord l'existence de l'intégrale, on majore

$$|h(f_Y(x))| \leq \frac{f_Y(x)}{\ln 2} \left(|\ln(\sigma\sqrt{2\pi})| + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Le membre de droite est intégrable puisque $\int f_Y = 1$ et

$\int (x-m)^2 f_Y(x) dx = V(Y) = \sigma^2$. L'entropie est donc absolument convergente. On peut intégrer les deux termes séparément :

$$H(Y) = \frac{1}{\ln 2} \left(\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} \right) = \frac{\ln(2\pi e\sigma^2)}{2\ln 2}.$$

Méthode 2 — Changement de variable affine.

On pose $t = (x-m)/\sigma$ sur un segment; comme $\sigma > 0$, ce changement affine est croissant et $dx = \sigma dt$. On a $f_Y(m + \sigma t) = \phi(t)/\sigma$, donc

$$\sigma h(\phi(t)/\sigma) = h(\phi(t)) + \frac{\ln \sigma}{\ln 2} \phi(t).$$

Les deux fonctions de droite sont absolument intégrables, la première par a), la seconde parce que ϕ est une densité. Le changement affine et le passage aux deux bornes infinies établissent donc l'existence de l'entropie et donnent

$$H(Y) = H(Y_0) + \frac{\ln \sigma}{\ln 2} = \frac{\ln(2\pi e\sigma^2)}{2\ln 2}.$$

Le calcul par les moments utilise directement la moyenne et la variance; le changement affine explique pourquoi la translation par m ne modifie pas l'entropie et pourquoi le changement d'échelle ajoute $\ln \sigma / \ln 2$. L'entropie d'une variable continue peut être négative, par exemple si $2\pi e\sigma^2 < 1$; aucune positivité générale n'a été affirmée en partie IV.

IV.2) a) On choisit $f_0(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$ et $f_0(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Sur $]0, +\infty[$,

$$h(f_0(x)) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\ln 2} (\lambda x - \ln \lambda).$$

L'intégrale de sa valeur absolue est majorée par

$$\frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} f_0(x) (\lambda x + |\ln \lambda|) dx = \frac{1 + |\ln \lambda|}{\ln 2} < +\infty,$$

car $E(X_0) = 1/\lambda$. L'entropie existe donc et

$$H(X_0) = \frac{\lambda E(X_0) - \ln \lambda}{\ln 2} = \frac{1 - \ln \lambda}{\ln 2}.$$

b) Comme X prend des valeurs strictement positives, on peut choisir sa densité nulle sur $] -\infty, 0]$; modifier une densité en un nombre fini de points ne modifie aucune intégrale. Sur $]0, +\infty[$, $\ln f_0(x) = \ln \lambda - \lambda x$. L'intégrale demandée est absolument convergente, car

$$\int_0^{+\infty} |f(x) \ln f_0(x)| dx \leq |\ln \lambda| \int_0^{+\infty} f(x) dx + \lambda \int_0^{+\infty} x f(x) dx = |\ln \lambda| + 1.$$

En utilisant $\int f = 1$ et $E(X) = 1/\lambda$, on obtient

$$-\frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} f(x) \ln f_0(x) dx = -\frac{1}{\ln 2} \left(\ln \lambda - \lambda \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1 - \ln \lambda}{\ln 2} = H(X_0).$$

Pour comparer les entropies, fixons $x > 0$ tel que $f(x) > 0$. La densité f_0 est strictement positive en ce point, et (1) appliquée à $u = f_0(x)/f(x)$ donne

$$f(x) \ln \left(\frac{f_0(x)}{f(x)} \right) \leq f_0(x) - f(x).$$

En réarrangeant et en divisant par $\ln 2 > 0$, on obtient

$$h(f(x)) \leq -\frac{f(x) \ln f_0(x)}{\ln 2} + \frac{f_0(x) - f(x)}{\ln 2}.$$

Si $f(x) = 0$, le membre de gauche vaut $h(0) = 0$ et le membre de droite vaut $f_0(x)/\ln 2 > 0$: cette dernière inégalité reste donc valable sans logarithme d'une quantité nulle.

On intègre d'abord cette inégalité sur $[a, b]$ avec $0 < a < b$. Les intégrandes y sont intégrables : les densités ont des limites latérales finies et un nombre fini de points de discontinuité ; le prolongement h est continu. On fait ensuite tendre a vers 0^+ et b vers $+\infty$. L'intégrale de $h(f)$ converge par hypothèse, celle de $f \ln f_0$ converge absolument

comme établi plus haut, et celles de f et f_0 valent 1. Il vient

$$H(X) \leq -\frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} f(x) \ln f_0(x) dx + \frac{1}{\ln 2} \left(\int_0^{+\infty} f_0(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx \right) = H(X_0).$$

La loi exponentielle réalise donc la plus grande entropie parmi les variables de la question, d'espérance fixée $1/\lambda$.

Relevé des adaptations

- II.3 : Code adapté en Python, en conservant exactement les tirages uniformes et le branchement de l'algorithme. La syntaxe et les bornes exclusives de `randint` sont documentées dans le sujet.
- Préambule de IV, IV.1.a–b et IV.2.a–b : prolongement de h à $[0, +\infty[$ pour que $h(f(x))$ soit défini lorsque la densité dépasse 1. Le domaine initial $[0, 1]$ du PDF ne permettait pas tous les paramètres normaux et exponentiels demandés. Les limites latérales finies des densités sont précisées pour rester dans le cadre officiel.