



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2002

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème est d'étudier la rentabilité d'un investissement en fonction du taux d'intérêt, ce qui conduit à l'étude, dans les parties II et III, des équations suivantes pour $0 < x < 1$:

$$x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0,$$

$$Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \dots + 2x^2 + x - a = 0.$$

Dans la partie I, on étudie la première de ces équations dans deux cas particuliers : $N = 2$ et $N = 3$.

Partie I

1. Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, avec $0 < x < 1$

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une et une seule racine réelle appartenant à $]0, 1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2 .

b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$.

c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

2. Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$, avec $0 < x < 1$

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

- a)** Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à $]0, 1[$.
- b)** Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.
- c)** Calculer les dérivées f' et f'' de f , et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à $[1/3, 1]$.
- d)** On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Majorer $|u_n - r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3 .

Partie II

3. Étude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

On note f_N la fonction polynôme définie par

$$f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a.$$

- a)** Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive x_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0, 1[$ lorsque $N > a$.
- b)** Montrer la relation $(*)$:
$$(x - 1)f_N(x) = x^{N+1} - (a + 1)x + a.$$

4. Racine positive de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

- a) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante. En déduire que la suite (x_N) converge vers un nombre réel x^* appartenant à $[0, 1[$.
- b) Montrer que $0 < x_N \leq x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$, lorsque $N \geq A$, où A est un entier supérieur ou égal à 2.

En choisissant $A > a$, en déduire la limite de la suite (x_N^N) lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation (*), exprimer la limite x^* en fonction de a .

On convient alors de poser

$$x_N = \frac{a}{a+1}(1 + \varepsilon_N),$$

et ε_N tend donc vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

- c) Établir à l'aide de la relation (*) l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1 + \varepsilon_N) \right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a).$$

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1 + \varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer à l'aide de la relation (*) un équivalent de ε_N en fonction de a et N .

On considère un investissement qui nécessite l'apport initial d'une somme $S_0 > 0$ l'année 0, puis qui rapporte ensuite la même somme $S > 0$ pendant chacune des N années suivantes, c'est-à-dire pendant les années 1, 2, ..., N .

Lorsque le taux d'intérêt des placements est supposé constant au cours du temps et égal à $r > 0$, on sait que le placement d'une somme s à l'issue de l'année 0 conduit à une somme $s_1 = (1+r)s$ à l'issue de l'année 1, puis à une somme $s_n = (1+r)^n s$ à l'issue de l'année n .

Dans ce contexte, on obtiendra une somme S_n à l'issue de l'année n si et seulement si on obtient une somme $S_n/(1+r)^n$ à l'issue de l'année 0, puisque le placement d'une telle

somme conduit précisément à l'obtention de S_n à l'issue de n années de placement. Aussi appellera-t-on, dans ce contexte, valeur présente de la somme S_n la somme $S_n/(1+r)^n$.

5. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

- a) Montrer que la valeur présente, à la fin de l'année 0, de l'investissement décrit ci-dessus est égale, compte tenu de la dépense initiale S_0 et des revenus attendus, à

$$VP(r) = \frac{S}{(1+r)^N} + \frac{S}{(1+r)^{N-1}} + \cdots + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{1+r} - S_0.$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée, c'est-à-dire s'il est financièrement plus intéressant de réaliser l'investissement projeté que de placer la somme S_0 au taux d'intérêt r des placements comme on l'a décrit plus haut.

- b) Montrer que l'équation $VP(r) = 0$ possède une racine strictement positive r_N et une seule si $N > S_0/S$. Donner l'expression de celle-ci en fonction de x_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$.
- c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N) , puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et S_0 et préciser un équivalent de l'erreur $r^* - r_N$ faite en remplaçant r_N par r^* .

Partie III

6. Étude de l'équation $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \cdots + x - a = 0$

On note g_N la fonction polynôme définie par

$$g_N(x) = Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \cdots + 2x^2 + x - a.$$

- a) Montrer que l'équation $g_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive y_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0, 1[$ lorsque $N(N+1) > 2a$.

- b) Montrer la relation (**):

$$(x-1)^2 g_N(x) = Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x - a(x-1)^2.$$

7. Racine positive de l'équation $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

- a) Montrer que $g_{N+1}(y_N) > g_N(y_N)$ et en déduire que la suite (y_N) est strictement décroissante. En déduire que la suite (y_N) converge vers un nombre réel y^* appartenant à $[0, 1[$.
- b) Montrer que $0 < Ny_N^N \leq Ny_A^N$ pour $N \geq A$, où A est un entier supérieur ou égal à 2 tel que $A(A+1) > 2a$. En déduire la limite de la suite (Ny_N^N) lorsque N tend vers $+\infty$ et, à l'aide de la relation (**), exprimer la limite y^* en fonction de a .

On modifie les hypothèses précédentes et on suppose désormais que l'investissement considéré, qui nécessite toujours l'apport initial d'une somme S_0 l'année 0, rapporte de plus en plus pendant chacune des N années suivantes, comme suit : une somme S l'année 1, une somme $2S$ l'année 2, une somme $3S$ l'année 3, et ainsi de suite jusqu'à une somme NS l'année N .

8. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

- a) Montrer que la valeur présente, à la fin de l'année 0, de l'investissement décrit est égale à

$$VP(r) = \frac{NS}{(1+r)^N} + \frac{(N-1)S}{(1+r)^{N-1}} + \dots + \frac{2S}{(1+r)^2} + \frac{S}{1+r} - S_0.$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée.

- b) Montrer que l'équation $VP(r) = 0$ possède une racine strictement positive r_N et une seule lorsque $N(N+1) > 2S_0/S$. Donner l'expression de celle-ci en fonction de y_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$.
- c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N) , puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et S_0 .