



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2002

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

a) On résout le trinôme, dont le discriminant vaut $1 + 4 = 5$. Ses deux racines réelles sont

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

La première est négative. Puisque $1 < \sqrt{5} < 3$, la seconde appartient à $]0, 1[$. Il y a donc exactement une racine dans cet intervalle :

$$r_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

On remarque aussi que $\sqrt{5} > 2$, donc $r_2 > 1/2$. Cette précision permettra d'appliquer les inégalités de la question c) sur un même intervalle à u_n et à r_2 .

b) Si $1/2 \leq x \leq 1$, alors $3/2 \leq x + 1 \leq 2$. Toutes ces quantités sont positives, donc le passage aux inverses renverse les inégalités :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3} \leq 1.$$

Ainsi $f([1/2, 1]) \subset [1/2, 1]$.

c) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$, avec

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Sur $[1/2, 1]$, on a $x + 1 \geq 3/2$, d'où

$$|f'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{(3/2)^2} = \frac{4}{9}.$$

Cette borne est atteinte en $x = 1/2$.

d) On cherche une estimation de l'erreur par rapport au point fixe. Comme $u_0 = 1$ et que l'intervalle $[1/2, 1]$ est stable par f , une récurrence donne $u_n \in [1/2, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, $r_2^2 + r_2 = 1$ entraîne $f(r_2) = r_2$.

Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis

La fonction f est dérivable sur un intervalle contenant $[1/2, 1]$ et sa dérivée y est majorée en valeur absolue par $4/9$. L'inégalité des accroissements finis donne donc, pour tout $n \geq 0$,

$$|u_{n+1} - r_2| = |f(u_n) - f(r_2)| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|.$$

Par récurrence sur n ,

$$|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n,$$

car $0 < 1 - r_2 < 1$. Puisque $0 < 4/9 < 1$, le majorant tend vers 0, et le théorème d'encadrement donne $u_n \rightarrow r_2$.

Méthode 2 — Différence exacte de deux inverses

Pour $x, y \in [1/2, 1]$, on calcule directement

$$f(x) - f(y) = \frac{y - x}{(1 + x)(1 + y)}.$$

Le dénominateur est au moins $(3/2)^2$, donc $|f(x) - f(y)| \leq (4/9)|x - y|$. En prenant $x = u_n$ et $y = r_2$, puis en appliquant successivement cette inégalité, on obtient

$$|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n (1 - r_2) \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \rightarrow 0.$$

La première méthode s'applique aussi à des fonctions pour lesquelles une différence exacte est difficile à simplifier. Ici, la seconde donne la même estimation par un calcul algébrique direct.

2. Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$

a) Posons $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$P'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $P(0) = -1 < 0$ et $P(1) = 2 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une racine dans $]0, 1[$, et la stricte croissance assure son unicité sur $\mathbb{R}$. On la note r_3 .

Comme $P(r_3) = 0$, on a $r_3(r_3^2 + r_3 + 1) = 1$, donc $f(r_3) = r_3$. De plus, $r_3 < 1$ implique $r_3^2 + r_3 + 1 < 3$, d'où $r_3 > 1/3$.

b) Si $1/3 \leq x \leq 1$, alors

$$\frac{13}{9} \leq x^2 + x + 1 \leq 3.$$

En passant aux inverses de ces nombres strictement positifs, on obtient

$$\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{9}{13} < 1.$$

Ainsi $f([1/3, 1]) \subset [1/3, 1]$.

c) Le dénominateur $D(x) = x^2 + x + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Par dérivation,

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{D(x)^2},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{D(x)^2} + \frac{2(2x+1)^2}{D(x)^3} = \frac{2((2x+1)^2 - D(x))}{D(x)^3} = \frac{6x(x+1)}{D(x)^3}.$$

Sur $[1/3, 1]$, on a $f' < 0$ et $f'' > 0$. Ainsi $|f'| = -f'$ y est strictement décroissante. Son maximum est atteint en $1/3$ et vaut

$$\max_{x \in [1/3, 1]} |f'(x)| = \frac{5/3}{(13/9)^2} = \frac{135}{169} < 1.$$

d) Posons $c = 135/169$. Par b), tous les termes de la suite appartiennent à $[1/3, 1]$; la question a) donne également $r_3 \in [1/3, 1]$ et $f(r_3) = r_3$.

Méthode 1 — Estimation quantitative de l'erreur

La dérivée de f est majorée en valeur absolue par c sur l'intervalle contenant tous les u_n et r_3 . L'inégalité des accroissements finis donne

$$|u_{n+1} - r_3| \leq c|u_n - r_3|.$$

Une récurrence entraîne

$$|u_n - r_3| \leq c^n(1 - r_3) \leq \frac{2}{3} \left(\frac{135}{169} \right)^n.$$

Comme $c \in]0, 1[$, cette borne tend vers 0, d'où $u_n \rightarrow r_3$.

Méthode 2 — Étude des sous-suites paires et impaires

La fonction f est décroissante sur $[1/3, 1]$, donc $f \circ f$ y est croissante. On a $u_1 = 1/3$, $u_2 = 9/13 < u_0 = 1$, et $u_3 = f(9/13) > f(1) = u_1$. En appliquant de façon répétée la fonction croissante $f \circ f$, on en déduit que (u_{2n}) est décroissante et que (u_{2n+1}) est croissante.

Comme $u_1 \leq r_3 \leq u_0$ et que f est décroissante avec $f(r_3) = r_3$, une récurrence donne

$$u_{2n+1} \leq r_3 \leq u_{2n}.$$

Les deux sous-suites sont donc monotones et bornées. Notons L la limite des termes pairs et ℓ celle des termes impairs. On a $1/3 \leq \ell \leq r_3 \leq L \leq 1$. La continuité de f donne $L = f(\ell)$ et $\ell = f(L)$, c'est-à-dire

$$L(\ell^2 + \ell + 1) = 1, \quad \ell(L^2 + L + 1) = 1.$$

En soustrayant les deux égalités, on obtient $(L - \ell)(1 - L\ell) = 0$. Or $L\ell \leq r_3 < 1$, donc $L = \ell$. Cette limite commune est un point fixe de f , donc une racine positive de P , et vaut r_3 . Les sous-suites paires et impaires convergent vers la même limite, donc $u_n \rightarrow r_3$.

Cette seconde méthode décrit l'alternance des approximations autour de la racine. La première fournit en plus la majoration explicite demandée.

Partie II

3. Étude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

a) On écrit

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^N x^k - a.$$

Sur $[0, +\infty[$, cette fonction est continue, dérivable, et

$$f'_N(x) = \sum_{k=1}^N kx^{k-1} \geq 1.$$

Elle est donc strictement croissante. Comme $f_N(0) = -a < 0$ et $f_N(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit une unique racine strictement positive x_N .

Enfin, $f_N(1) = N - a$. Lorsque $N > a$, cette valeur est strictement positive et $f_N(0) < 0$, donc $0 < x_N < 1$. Pour préciser les cas limites, $N = a$ entraîne $x_N = 1$, tandis que $N < a$ entraîne $x_N > 1$.

b) On multiplie la somme finie par $x - 1$. Les puissances intermédiaires s'éliminent deux à deux :

$$(x - 1) \sum_{k=1}^N x^k = \sum_{k=1}^N (x^{k+1} - x^k) = x^{N+1} - x.$$

Par conséquent, pour tout réel x ,

$$(x - 1)f_N(x) = x^{N+1} - x - a(x - 1) = x^{N+1} - (a + 1)x + a.$$

C'est la relation (*). Aucun quotient par $x - 1$ n'a été utilisé ; elle vaut donc aussi en $x = 1$.

4. Racine positive de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

a) On a $f_{N+1}(x) = f_N(x) + x^{N+1}$. En prenant $x = x_N > 0$, il vient

$$f_{N+1}(x_N) = x_N^{N+1} > 0 = f_N(x_N).$$

Comme f_{N+1} est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et s'annule en x_{N+1} , on en déduit $x_{N+1} < x_N$. La suite $(x_N)_{N \geq 2}$ est strictement décroissante et minorée par 0; elle converge donc vers un réel $x^* \geq 0$.

Choisissons un entier $A \geq 2$ tel que $A > a$. D'après 3.a), $x_A < 1$. Pour $N \geq A$, la décroissance donne $x_N \leq x_A$, donc $x^* \leq x_A < 1$. Ainsi $x^* \in [0, 1[$, même si certains des premiers termes peuvent être supérieurs ou égaux à 1.

b) Question adaptée au programme actuel. Le choix strict $A > a$ rectifie le choix $A \geq a$ du PDF : si $A = a$ est un entier, alors $x_A = 1$ et la majoration par x_A^N ne tend pas vers 0. On précise aussi $A \geq 2$, pour que x_A soit défini dans la famille considérée.

Pour tout entier $A \geq 2$ et tout $N \geq A$, la positivité et la décroissance donnent $0 < x_N \leq x_A$. La fonction $t \mapsto t^N$ est croissante sur $[0, +\infty[$, donc

$$0 < x_N^N \leq x_A^N.$$

Choisissons maintenant $A > a$. Alors $0 < x_A < 1$ et la suite géométrique x_A^N tend vers 0. Par encadrement, $x_N^N \rightarrow 0$. Comme $x_N \rightarrow x^*$ est une suite bornée, on obtient aussi $x_N^{N+1} = x_N x_N^N \rightarrow 0$.

La relation $(*)$, évaluée à la racine x_N , donne

$$0 = x_N^{N+1} - (a+1)x_N + a.$$

Le passage à la limite entraîne $(a+1)x^* = a$, d'où

$$x^* = \frac{a}{a+1}.$$

Cette limite est strictement positive et strictement inférieure à 1, puisque $a > 0$.

c) Posons $q = a/(a+1)$, de sorte que $q \in]0, 1[$ et $x_N = q(1 + \varepsilon_N)$. La relation $(*)$ en x_N donne

$$x_N^{N+1} = (a+1)x_N - a = a\varepsilon_N.$$

Le membre de gauche est strictement positif ; ainsi $\varepsilon_N > 0$ pour tout $N \geq 2$. Les logarithmes ci-dessous sont donc bien définis. Comme $x_N \rightarrow q$, on a $\varepsilon_N \rightarrow 0$.

En prenant le logarithme de l'égalité précédente, puis en multipliant par ε_N , on obtient exactement

$$(N+1)\varepsilon_N[\ln q + \ln(1 + \varepsilon_N)] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln a.$$

Méthode 1 — Exploitation de l'identité logarithmique

Les croissances comparées donnent $\varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) \rightarrow 0$, puisque $\varepsilon_N \rightarrow 0^+$. On a également $\varepsilon_N \ln a \rightarrow 0$, tandis que $\ln q + \ln(1 + \varepsilon_N) \rightarrow \ln q < 0$. En divisant l'identité précédente par ce dernier facteur, non nul à partir d'un certain rang, on obtient

$$(N+1)\varepsilon_N \rightarrow 0.$$

Le taux d'accroissement du logarithme en 1 donne $\ln(1 + \varepsilon_N)/\varepsilon_N \rightarrow 1$. Par conséquent,

$$(N+1)\ln(1 + \varepsilon_N) = (N+1)\varepsilon_N \frac{\ln(1 + \varepsilon_N)}{\varepsilon_N} \rightarrow 0.$$

La continuité de l'exponentielle entraîne alors

$$(1 + \varepsilon_N)^{N+1} = \exp((N+1)\ln(1 + \varepsilon_N)) \rightarrow 1.$$

Enfin, $a\varepsilon_N = x_N^{N+1} = q^{N+1}(1 + \varepsilon_N)^{N+1}$, donc

$$\frac{\varepsilon_N}{q^{N+1}/a} = (1 + \varepsilon_N)^{N+1} \rightarrow 1.$$

Ainsi

$$\varepsilon_N \sim \frac{1}{a} \left(\frac{a}{a+1} \right)^{N+1}.$$

Méthode 2 — Majoration géométrique préalable

Fixons un entier $A \geq 2$ avec $A > a$ et posons $c = x_A \in]0, 1[$. Pour $N \geq A$, on a $x_N \leq c$.

L'identité $a\varepsilon_N = x_N^{N+1}$ donne donc

$$0 < (N+1)\varepsilon_N \leq \frac{N+1}{a} c^{N+1} \rightarrow 0,$$

par les croissances comparées entre une puissance de N et une suite géométrique de raison $c < 1$. Pour $t \geq 0$, l'étude de $t - \ln(1+t)$, dont la dérivée est $t/(1+t) \geq 0$ et la valeur en 0 est nulle, donne $0 \leq \ln(1+t) \leq t$. Ainsi

$$0 \leq (N+1)\ln(1+\varepsilon_N) \leq (N+1)\varepsilon_N \rightarrow 0.$$

On en déduit de nouveau $(1+\varepsilon_N)^{N+1} \rightarrow 1$, puis, en divisant $a\varepsilon_N = q^{N+1}(1+\varepsilon_N)^{N+1}$ par q^{N+1} , le même équivalent $\varepsilon_N \sim q^{N+1}/a$.

La première méthode suit l'identité demandée. La seconde montre directement que l'erreur décroît assez vite pour que le facteur $N+1$ reste négligeable; elle évite de passer d'un équivalent à son exponentielle sans justification.

5. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

- a) Le décaissement initial est $-S_0$ à la fin de l'année 0. Chacune des recettes S reçues à la fin de l'année k a pour valeur présente $S/(1+r)^k$. L'addition des flux actualisés donne donc

$$VP(r) = -S_0 + \sum_{k=1}^N \frac{S}{(1+r)^k},$$

soit, dans l'ordre décroissant des années demandé,

$$VP(r) = \frac{S}{(1+r)^N} + \frac{S}{(1+r)^{N-1}} + \dots + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{1+r} - S_0.$$

b) On prend désormais $a = S_0/S > 0$.

Méthode 1 — Transformation en l'équation polynomiale déjà étudiée

Pour $r > 0$, posons $x = 1/(1+r)$. Cette transformation est une bijection décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$, d'inverse $r = 1/x - 1$. La question a) donne

$$VP(r) = S \left(\sum_{k=1}^N x^k - a \right) = S f_N(x).$$

Si $N > a$, la question 3.a) fournit une unique racine $x_N \in]0, 1[$. L'équation $VP(r) = 0$ possède donc une unique racine strictement positive

$$r_N = \frac{1}{x_N} - 1.$$

Comme $S > 0$ et que f_N est strictement croissante sur $[0, +\infty[$,

$$VP(r) \geq 0 \iff f_N(x) \geq 0 \iff x \geq x_N \iff r \leq r_N.$$

Compte tenu de la condition $r > 0$, les taux admissibles sont donc exactement $0 < r \leq r_N$.

Méthode 2 — Variations de la valeur présente

La fonction VP est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$VP'(r) = -S \sum_{k=1}^N \frac{k}{(1+r)^{k+1}} < 0.$$

Elle décroît strictement de $NS - S_0$ à $-S_0$. Si $N > a$, ces valeurs sont de signes opposés. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte décroissance donnent donc un

unique zéro $r_N > 0$. La décroissance montre aussi que $VP(r) \geq 0$ équivaut à $r \leq r_N$. Enfin, en posant $x = 1/(1 + r_N)$, la formule de la question a) donne $f_N(x) = 0$, donc $x = x_N$ et $r_N = 1/x_N - 1$.

Si $N = a$, l'unique zéro sur $[0, +\infty[$ est 0, exclu des taux strictement positifs ; si $N < a$, la fonction est toujours négative pour $r > 0$. Ces cas montrent pourquoi la condition stricte $N > S_0/S$ est nécessaire.

La première méthode réutilise directement l'étude des racines et fournit leur lien avec le taux. La seconde explique la structure du seuil par la décroissance de la valeur présente lorsque le taux augmente.

- c) La suite des taux est considérée pour les entiers $N \geq 2$ tels que $N > a$; ces indices forment une suite d'entiers consécutifs à partir d'un certain rang. Comme $x_{N+1} < x_N$ et que les termes sont positifs, on a $1/x_{N+1} > 1/x_N$. Ainsi (r_N) est strictement croissante.

Par 4.b), $x_N \rightarrow q = a/(a + 1) > 0$. La continuité de l'inverse sur $]0, +\infty[$ donne

$$r_N \longrightarrow r^* = \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{a} = \frac{S}{S_0}.$$

Pour l'erreur, on utilise l'identité exacte $x_N = q(1 + \varepsilon_N)$:

$$r^* - r_N = \frac{1}{q} - \frac{1}{x_N} = \frac{1}{q} \frac{\varepsilon_N}{1 + \varepsilon_N}.$$

Comme $\varepsilon_N \rightarrow 0$ et $\varepsilon_N \sim q^{N+1}/a$ d'après 4.c), on obtient

$$r^* - r_N \sim \frac{q^N}{a} = \frac{S}{S_0} \left(\frac{S_0}{S_0 + S} \right)^N.$$

Cette erreur est positive : le seuil à horizon infini r^* majore chaque seuil r_N à horizon fini.

Partie III

6. Étude de l'équation $Nx^N + (N - 1)x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

a) On écrit

$$g_N(x) = \sum_{k=1}^N kx^k - a.$$

Sur $[0, +\infty[$, cette fonction est continue, dérivable, et

$$g'_N(x) = \sum_{k=1}^N k^2 x^{k-1} \geq 1.$$

Elle est donc strictement croissante. Comme $g_N(0) = -a < 0$ et $g_N(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, elle possède une unique racine strictement positive y_N .

La somme des N premiers entiers donne

$$g_N(1) = \frac{N(N+1)}{2} - a.$$

Si $N(N+1) > 2a$, cette valeur est strictement positive et, par croissance, $0 < y_N < 1$. En cas d'égalité, $y_N = 1$; si $N(N+1) < 2a$, alors $y_N > 1$.

b) Posons

$$H_N(x) = \sum_{k=1}^N kx^k.$$

En regroupant les termes de même degré dans $xH_N(x) - H_N(x)$, on obtient

$$(x-1)H_N(x) = Nx^{N+1} - \sum_{k=1}^N x^k.$$

En multipliant une nouvelle fois par $x-1$ et en utilisant l'identité télescopique de 3.b), il

vient

$$(x-1)^2 H_N(x) = Nx^{N+2} - Nx^{N+1} - (x^{N+1} - x) = Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x.$$

Puisque $g_N = H_N - a$, on en déduit, pour tout réel x ,

$$(x-1)^2 g_N(x) = Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x - a(x-1)^2.$$

C'est la relation (**). Elle vaut aussi pour $x = 1$, car aucune division par $x - 1$ n'a été effectuée.

7. Racine positive de l'équation $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

a) Pour tout réel x , on a $g_{N+1}(x) = g_N(x) + (N+1)x^{N+1}$. Ainsi

$$g_{N+1}(y_N) = (N+1)y_N^{N+1} > 0 = g_N(y_N).$$

La fonction g_{N+1} est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et s'annule en y_{N+1} ; on en déduit $y_{N+1} < y_N$. La suite est donc strictement décroissante et minorée par 0, et converge vers un réel $y^* \geq 0$.

Choisissons un entier $A \geq 2$ tel que $A(A+1) > 2a$. La question 6.a) donne $y_A < 1$. Pour $N \geq A$, on a $y_N \leq y_A$, donc $y^* \leq y_A < 1$. Finalement $y^* \in [0, 1[$.

b) Question adaptée au programme actuel. La précision $A \geq 2$ garantit que y_A est défini dans la famille du sujet. Pour $N \geq A$, la décroissance et la positivité donnent $0 < y_N \leq y_A$. On peut donc élever à la puissance entière N , puis multiplier par $N > 0$:

$$0 < Ny_N^N \leq Ny_A^N.$$

Or $A(A+1) > 2a$ entraîne $0 < y_A < 1$. Les croissances comparées donnent $Ny_A^N \rightarrow 0$, d'où, par encadrement, $Ny_N^N \rightarrow 0$.

Pour les indices assez grands, $0 < y_N < 1$. On a alors

$$0 \leq Ny_N^{N+2} \leq Ny_N^N \rightarrow 0,$$

$$0 \leq (N+1)y_N^{N+1} \leq \frac{N+1}{N} N y_N^N \rightarrow 0.$$

La relation (**), évaluée à y_N tel que $g_N(y_N) = 0$, s'écrit

$$0 = N y_N^{N+2} - (N+1) y_N^{N+1} + y_N - a(y_N - 1)^2.$$

Le passage à la limite donne $y^* = a(y^* - 1)^2$, soit

$$a(y^*)^2 - (2a+1)y^* + a = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme réel est $(2a+1)^2 - 4a^2 = 4a+1 > 0$. Ses racines sont

$$y_- = \frac{2a+1 - \sqrt{4a+1}}{2a}, \quad y_+ = \frac{2a+1 + \sqrt{4a+1}}{2a}.$$

Comme $\sqrt{4a+1} > 1$, on a $y_+ > 1$. D'autre part, $2a+1 > \sqrt{4a+1}$ puisque la différence de leurs carrés vaut $4a^2 > 0$, et $\sqrt{4a+1} > 1$ implique $y_- < 1$. Ainsi $0 < y_- < 1$. La condition $y^* \in [0, 1[$ impose donc

$$y^* = \frac{2a+1 - \sqrt{4a+1}}{2a} = \frac{2a}{2a+1 + \sqrt{4a+1}}.$$

La dernière écriture, obtenue en multipliant numérateur et dénominateur par $2a+1 + \sqrt{4a+1}$, confirme en particulier la stricte positivité de la limite.

8. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

- a) La recette reçue à la fin de l'année k est désormais kS ; sa valeur présente est $kS/(1+r)^k$. En tenant compte du décaissement initial, on obtient

$$VP(r) = -S_0 + \sum_{k=1}^N \frac{kS}{(1+r)^k},$$

soit

$$VP(r) = \frac{NS}{(1+r)^N} + \frac{(N-1)S}{(1+r)^{N-1}} + \dots + \frac{2S}{(1+r)^2} + \frac{S}{1+r} - S_0.$$

b) On prend de nouveau $a = S_0/S > 0$ et $x = 1/(1+r) \in]0, 1[$ pour $r > 0$. On a

$$VP(r) = S \left(\sum_{k=1}^N kx^k - a \right) = Sg_N(x).$$

Si $N(N+1) > 2a$, la question 6.a) fournit une unique racine $y_N \in]0, 1[$ de g_N . La bijection $r \mapsto 1/(1+r)$ donne donc une unique racine strictement positive de VP :

$$r_N = \frac{1}{y_N} - 1.$$

Comme g_N est strictement croissante et que $S > 0$,

$$VP(r) \geq 0 \iff x \geq y_N \iff r \leq r_N.$$

Les taux strictement positifs permettant la réalisation de l'investissement sont donc exactement $0 < r \leq r_N$.

Pour les autres cas, la question 6.a) donne $y_N \geq 1$ lorsque $N(N+1) \leq 2a$. Si $r > 0$, alors $x = 1/(1+r) < 1 \leq y_N$; la stricte croissance de g_N entraîne $g_N(x) < 0$, donc $VP(r) < 0$. En cas d'égalité $N(N+1) = 2a$, on a $y_N = 1$ et le seul taux non négatif annulant la valeur présente est $r = 0$. La condition stricte de la question est ainsi bien nécessaire à l'existence d'un seuil strictement positif.

c) On considère les entiers $N \geq 2$ tels que $N(N+1) > 2a$. La suite (y_N) est strictement décroissante et à termes positifs, donc $(r_N) = (1/y_N - 1)$ est strictement croissante sur ces indices.

Comme $y_N \rightarrow y^* > 0$, on peut passer à la limite dans l'inverse. La forme rationalisée de y^* obtenue en 7.b) donne

$$r^* = \frac{1}{y^*} - 1 = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2a} - 1 = \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2a}.$$

En remplaçant a par S_0/S , avec $S > 0$ et $S_0 > 0$, on obtient finalement

$$r^* = \frac{S}{2S_0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4S_0}{S}} \right) = \frac{S + \sqrt{S^2 + 4SS_0}}{2S_0}.$$

Le seuil est donc positif et chaque r_N lui est strictement inférieur, par la stricte décroissance de y_N vers y^* .

Relevé des adaptations

- II.4.b : remplacement du choix $A \geq a$ par $A > a$, afin de garantir $x_A < 1$ et la convergence de la majoration géométrique vers 0. Le choix initial peut donner $x_A = 1$ lorsque $a = A$ est un entier.
- II.4.b et III.7.b : précision $A \geq 2$, puisque les familles (x_N) et (y_N) du sujet sont définies pour les entiers $N > 1$.