



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2001

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Covariance des variables aléatoires X et Y

- a)** Les variances étant finies, $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ sont finies. L'inégalité $2|XY| \leq X^2 + Y^2$ assure l'existence de $E(XY)$. De même, $(\lambda X + Y)^2 \leq 2\lambda^2 X^2 + 2Y^2$, donc toutes les quantités utilisées existent.

La covariance d'une variable avec elle-même est sa variance :

$$\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = V(\lambda X + Y).$$

La bilinéarité et la symétrie de la covariance donnent

$$\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = \lambda^2 \text{Cov}(X, X) + \lambda \text{Cov}(X, Y) + \lambda \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, Y).$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

- b)** Posons $c = \text{Cov}(X, Y)$. Puisque $V(X) > 0$, on peut compléter le carré :

$$V(\lambda X + Y) = V(X) \left(\lambda + \frac{c}{V(X)} \right)^2 + V(Y) - \frac{c^2}{V(X)}.$$

En prenant $\lambda = -c/V(X)$ et en utilisant la positivité d'une variance, on obtient

$$V(Y) - \frac{c^2}{V(X)} \geq 0,$$

d'où $c^2 \leq V(X)V(Y)$.

Il y a égalité si et seulement si $V(Y - \frac{c}{V(X)}X) = 0$. D'après le rappel de l'énoncé, cela signifie que $Y - \frac{c}{V(X)}X$ est presque sûrement constante, donc qu'il existe deux réels a, b tels que

$$P(Y = aX + b) = 1.$$

Réciproquement, si cette relation est satisfaite, alors $\text{Cov}(X, Y) = aV(X)$ et $V(Y) = a^2V(X)$; les deux membres de l'inégalité sont donc égaux. La condition nécessaire et suffisante est bien une relation affine presque sûre entre X et Y . Le cas $a = 0$, correspondant à Y presque sûrement constante, est inclus.

2. Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Comme les deux variances sont strictement positives,

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

La question I.1.b donne $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$, donc $-1 \leq \rho \leq 1$.

Le cas d'égalité de I.1.b montre que $|\rho| = 1$ équivaut à l'existence de réels $a \neq 0$ et b tels que $Y = aX + b$ presque sûrement. Le coefficient a est non nul car $V(Y) > 0$. Dans ce cas,

$$\rho = \frac{aV(X)}{\sqrt{V(X)a^2V(X)}} = \frac{a}{|a|}.$$

Ainsi $\rho = 1$ si et seulement si $Y = aX + b$ presque sûrement avec $a > 0$; $\rho = -1$ si et seulement si une telle relation existe avec $a < 0$.

b) Deux variables indépendantes possédant des moments d'ordre deux ont une covariance nulle. Le dénominateur définissant ρ étant strictement positif, on en déduit $\rho = 0$.

c) La loi normale centrée réduite donne $E(X) = 0$ et $V(X) = E(X^2) = 1$. Pour calculer les moments de $Y = X^2$, il faut en particulier établir l'existence de $E(X^4)$.

Notons $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ la densité de X . Pour tout entier k compris entre 1 et 4, les croissances comparées donnent $|x|^{k+2}e^{-x^2/2} \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. Ainsi $|x|^k\phi(x)$ est majoré par une constante fois $1/x^2$ au voisinage des deux infinis; sur un segment, il est continu. Les quatre moments absolus considérés sont donc finis.

La fonction $x \mapsto x^3\phi(x)$ est impaire et absolument intégrable, d'où $E(X^3) = 0$.

Pour le quatrième moment, utilisons $\phi'(x) = -x\phi(x)$. L'intégration par parties sur

$[-A, A]$, avec $A > 0$, donne

$$\int_{-A}^A x^4 \phi(x) dx = -[x^3 \phi(x)]_{-A}^A + 3 \int_{-A}^A x^2 \phi(x) dx.$$

Le terme de bord tend vers zéro par croissance comparée. Les intégrales convergent absolument, ce qui permet de passer à la limite :

$$E(X^4) = 3E(X^2) = 3.$$

Le théorème de transfert et la formule de Koenig-Huygens donnent alors

$$E(Y) = E(X^2) = 1, \quad V(Y) = E(X^4) - (E(X^2))^2 = 3 - 1 = 2.$$

Enfin,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0, \quad \rho(X, Y) = 0.$$

Ces variables ne sont pourtant pas indépendantes. En effet, les événements $A = [|X| \leq 1]$ et $B = [Y \leq 1]$ sont identiques puisque $Y = X^2$. Leur probabilité

commune $r = \int_{-1}^1 \phi(x) dx$ appartient strictement à $]0, 1[$: la densité est strictement positive sur $[-1, 1]$ et en dehors de cet intervalle. On a donc

$$P(A \cap B) = r \neq r^2 = P(A)P(B).$$

L'indépendance impliquerait cette égalité, car A ne dépend que de X et B que de Y . La réciproque de I.2.b est donc fausse : une corrélation nulle n'assure pas l'indépendance.

Partie II

1. Calculs préliminaires

a) Méthode 1 — Récurrence sur la borne supérieure.

Fixons $q \in \mathbb{N}$. Pour $n = q$, on a

$$\sum_{k=q}^q \binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1}.$$

Supposons l'égalité vraie à un rang $n \geq q$. Alors, en utilisant la relation de Pascal,

$$\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} = \binom{n+2}{q+1}.$$

L'égalité est donc vraie pour tout $n \geq q$.

Méthode 2 — Somme télescopique.

Avec la convention $\binom{q}{q+1} = 0$, la relation de Pascal s'écrit, pour $k \geq q$,

$$\binom{k}{q} = \binom{k+1}{q+1} - \binom{k}{q+1}.$$

En sommant de $k = q$ à n , les termes intermédiaires s'annulent et il reste

$$\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1} - \binom{q}{q+1} = \binom{n+1}{q+1}.$$

La récurrence suit la méthode imposée ; la somme télescopique explique directement pourquoi seule la dernière borne demeure.

b) Pour $q = 1$, la formule précédente donne

$$\sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $q = 2$, on utilise $k(k-1) = 2\binom{k}{2}$:

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) = 2\binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

Puisque $k^2 = k(k-1) + k$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Enfin, pour $q = 3$, $k(k-1)(k-2) = 6\binom{k}{3}$ donne

$$\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) = 6\binom{n+1}{4} = \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4}.$$

Les sommes vides sont prises égales à zéro. En particulier, la dernière formule reste vraie pour $n = 2$.

2. Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2

a) Au premier tirage, chacun des n jetons est équiprobable, donc

$$P(N_1 = i) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Conditionnellement à $N_1 = i$, les $n-1$ autres jetons sont équiprobables au second tirage :

$$P(N_2 = j \mid N_1 = i) = \frac{1}{n-1} \quad (j \neq i).$$

Pour $j = i$, cette probabilité vaut zéro puisque le tirage est sans remise. Les événements $[N_1 = i]$, de probabilités strictement positives, forment un système complet. La formule

des probabilités totales donne, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(N_2 = j) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi N_1 et N_2 suivent toutes deux la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

b) Méthode 1 — Moments de la loi uniforme.

Les deux variables suivent la même loi uniforme discrète, dont l'espérance et la variance sont connues :

$$E(N_1) = E(N_2) = \frac{n+1}{2}, \quad V(N_1) = V(N_2) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Méthode 2 — Calcul à partir des sommes.

Les variables sont bornées, donc leurs moments existent. Avec II.1.b,

$$E(N_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2},$$

$$E(N_1^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Par Koenig-Huygens,

$$V(N_1) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}.$$

L'identité des lois donne les mêmes résultats pour N_2 . La première méthode reconnaît une loi usuelle ; la seconde retrouve ses moments et rend explicites les sommes utilisées.

c) Le produit des probabilités du premier tirage et du tirage conditionnel donne

$$P([N_1 = i] \cap [N_2 = j]) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Le transfert pour ce couple fini donne

$$E(N_1 N_2) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n ij.$$

La somme sur tous les couples est le carré de

$$\sum i;$$

il faut en retirer les couples diagonaux :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n ij = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En mettant $n(n+1)/12$ en facteur, cette expression devient

$$\frac{n(n+1)}{12} (3n(n+1) - 2(2n+1)) = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}.$$

Comme $n \geq 2$, la division par $n(n-1)$ est légitime et donne

$$E(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

Par suite,

$$\text{Cov}(N_1, N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = -\frac{n+1}{12}.$$

Les deux variances valent $(n^2 - 1)/12 > 0$, donc

$$\rho(N_1, N_2) = \frac{-(n+1)/12}{(n^2-1)/12} = -\frac{1}{n-1}.$$

Pour $n = 2$, cette corrélation vaut -1 , ce qui correspond à l'identité $N_2 = 3 - N_1$.

d) Les variables ont des variances finies. La formule de variance d'une somme donne

$$V(N_1 + N_2) = V(N_1) + V(N_2) + 2\text{Cov}(N_1, N_2),$$

d'où

$$V(N_1 + N_2) = \frac{2(n^2 - 1) - 2(n + 1)}{12} = \frac{(n + 1)(n - 2)}{6}.$$

Pour $n = 2$, cette variance est nulle : la somme des deux jetons tirés est toujours 3.

3. Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y

a) Pour $1 \leq i < j \leq n$, l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ est la réunion disjointe des événements $[N_1 = i] \cap [N_2 = j]$ et $[N_1 = j] \cap [N_2 = i]$. Chacun a une probabilité $1/(n(n-1))$, donc

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Les deux numéros sont distincts et compris entre 1 et n . Tous les autres couples ont donc une probabilité nulle.

b) Méthode 1 — Sommation de la loi conjointe.

Pour $2 \leq j \leq n$, les valeurs possibles du minimum sont $1, \dots, j-1$, donc

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}.$$

Pour $1 \leq i \leq n-1$, les valeurs possibles du maximum sont $i+1, \dots, n$, donc

$$P(X = i) = \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}.$$

Pour $j = 1$, la première expression donne zéro, comme $P(Y = 1)$; pour $i = n$, la seconde donne zéro, comme $P(X = n)$.

Méthode 2 — Probabilités cumulées.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $[Y \leq j]$ signifie que les deux tirages appartiennent aux j premiers jetons. Les probabilités successives valent j/n , puis $(j-1)/(n-1)$, donc

$$P(Y \leq j) = \frac{j(j-1)}{n(n-1)}.$$

En soustrayant la même expression au rang $j-1$, on obtient

$$P(Y = j) = 2(j-1)/(n(n-1)) \text{ pour } j \geq 2.$$

De même, pour $1 \leq i \leq n$, les deux jetons doivent appartenir à $\{i, \dots, n\}$ pour que $X \geq i$. Ainsi

$$P(X \geq i) = \frac{(n-i+1)(n-i)}{n(n-1)}.$$

La différence entre les valeurs aux rangs i et $i+1$ donne $P(X = i) = 2(n-i)/(n(n-1))$.

Aux extrémités, les événements $[Y = 1]$ et $[X = n]$ sont impossibles. Cette seconde approche est utile lorsque l'on cherche d'abord une fonction de répartition ou une probabilité de dépassement.

- c) Pour $1 \leq i < j \leq n$, les probabilités conditionnantes sont strictement positives. Par la définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P(X = i \mid Y = j) = \frac{2/(n(n-1))}{2(j-1)/(n(n-1))} = \frac{1}{j-1},$$

$$P(Y = j \mid X = i) = \frac{2/(n(n-1))}{2(n-i)/(n(n-1))} = \frac{1}{n-i}.$$

Les autres valeurs du minimum ou du maximum ont une probabilité conditionnelle nulle. Ainsi, sachant $Y = j$, X est uniforme sur $\llbracket 1, j-1 \rrbracket$; sachant $X = i$, Y est uniforme sur $\llbracket i+1, n \rrbracket$.

- d) Méthode 1 — Comparaison des probabilités ponctuelles.

Pour $2 \leq j \leq n$,

$$P(n+1-X = j) = P(X = n+1-j) = \frac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = P(Y = j).$$

Les deux variables prennent leurs valeurs dans $\llbracket 2, n \rrbracket$, donc elles ont la même loi.

Méthode 2 — Réflexion des numéros.

Remplaçons chaque numéro tiré r par $n+1-r$. Cette opération est une bijection sur l'ensemble des couples ordonnés de numéros distincts; tous ces couples étant équiprobables, elle conserve leur loi. Le maximum des deux numéros transformés est $n+1-\min(N_1, N_2) = n+1-X$. Il a donc la même loi que le maximum initial Y .

Dans les deux méthodes, l'identité des lois et l'existence des moments donnent

$$E(Y) = E(n+1-X) = n+1-E(X),$$

$$V(Y) = V(n+1-X) = V(X).$$

Ainsi $E(X) = n+1-E(Y)$ et $V(X) = V(Y)$. La première méthode utilise les lois déjà calculées; la seconde met en évidence la symétrie de l'expérience.

4. Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

a) Méthode 1 — Transfert à partir de la loi du maximum.

La variable Y est bornée, donc son espérance existe. Avec II.1.b,

$$E(Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n j(j-1) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{2(n+1)}{3}.$$

La relation II.3.d donne alors

$$E(X) = n + 1 - \frac{2(n+1)}{3} = \frac{n+1}{3}.$$

Méthode 2 — Décomposition du minimum en indicatrices.

Pour toute valeur entière de X entre 1 et $n-1$,

$$X = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{[X \geq k]}.$$

En prenant les espérances, par linéarité d'une somme finie, puis en utilisant la probabilité cumulée de II.3.b,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)}.$$

Avec le changement d'indice entier $r = n - k$, il vient

$$E(X) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{r=1}^{n-1} (r^2 + r).$$

Les sommes de II.1.b donnent

$$\sum_{r=1}^{n-1} (r^2 + r) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

On retrouve $E(X) = (n+1)/3$, puis $E(Y) = n+1 - E(X) = 2(n+1)/3$. Cette méthode transforme une espérance en somme de probabilités de dépassement, sans supposer une formule générale pour ces sommes.

b) Le choix de $Y(Y-2)$ permet de faire apparaître le produit de trois entiers consécutifs demandé en II.1.b :

$$E(Y(Y-2)) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n j(j-1)(j-2).$$

Le terme $j=2$ est nul. La dernière formule de II.1.b donne

$$E(Y(Y-2)) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

L'identité $Y^2 = Y(Y-2) + 2Y$ entraîne

$$E(Y^2) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4(n+1)}{3} = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}.$$

Tous les moments sont finis puisque les variables sont bornées. La formule de Koenig-Huygens donne

$$V(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

Par II.3.d,

$$V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

Pour $n = 2$, ces deux variances sont nulles, conformément à $X = 1$ et $Y = 2$.

5. Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Les deux nombres X et Y sont les deux nombres N_1 et N_2 placés dans l'ordre croissant. Pour chaque tirage,

$$X + Y = N_1 + N_2,$$

et donc, par II.2.d,

$$V(X + Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{6}.$$

Méthode 1 — Variance d'une somme.

En isolant la covariance dans $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ et en utilisant II.4.b, on obtient

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)(n-2)}{6} - \frac{2(n+1)(n-2)}{18} \right) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}.$$

Méthode 2 — Produit inchangé par le classement.

Le classement conserve aussi le produit : $XY = N_1 N_2$. Avec II.2.c et II.4.a,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(N_1 N_2) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{2(n+1)^2}{9}.$$

En mettant $(n + 1)/36$ en facteur,

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{n + 1}{36} (3(3n + 2) - 8(n + 1)) = \frac{(n + 1)(n - 2)}{36}.$$

La première méthode suit la demande et exploite la somme ; la seconde fournit une vérification indépendante par le produit.

b) Question adaptée au programme actuel. Le cas $n = 2$ doit être distingué, car une corrélation n'est définie que si les deux variances sont strictement positives.

Pour $n \geq 3$, II.4.b donne $V(X) = V(Y) = (n + 1)(n - 2)/18 > 0$. Ainsi

$$\rho(X, Y) = \frac{(n + 1)(n - 2)/36}{(n + 1)(n - 2)/18} = \frac{1}{2}.$$

Cette valeur est indépendante de n pour $n \geq 3$.

Pour $n = 2$, on tire nécessairement les numéros 1 et 2, donc $X = 1$ et $Y = 2$. Leurs deux variances sont nulles ; leur coefficient de corrélation n'est pas défini. La covariance reste bien égale à zéro, comme l'indique sa formule.

6. Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires X et Y

a) La fonction G est une somme finie de polynômes, donc ses dérivées partielles se calculent terme à terme, sans question de convergence. En notant

$$p_{ij} = P([X = i] \cap [Y = j]),$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i p_{ij} (1 + u)^{i-1} (1 + v)^j.$$

Au point $(0, 0)$, le transfert pour le couple fini donne donc

$$\frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i p_{ij} = E(X).$$

De même,

$$\frac{\partial G}{\partial v}(0, 0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n j p_{ij} = E(Y).$$

En dérivant une seconde fois, on obtient les trois autres identités :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0, 0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i(i-1)p_{ij} = E(X(X-1)),$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0, 0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n j(j-1)p_{ij} = E(Y(Y-1)),$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0, 0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n ij p_{ij} = E(XY).$$

Les termes dont le facteur $i(i-1)$ ou $j(j-1)$ est nul sont simplement nuls; aucune puissance négative n'est requise dans la dérivée du polynôme. On pourra ainsi retrouver les seconds moments par $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$ et de même pour Y .

b) La loi conjointe établie en II.3.a donne

$$G(u, v) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n (1+v)^j \sum_{i=1}^{j-1} (1+u)^i.$$

Pour $u \neq 0$, la somme géométrique finie vaut

$$\sum_{i=1}^{j-1} (1+u)^i = \frac{(1+u)^j - (1+u)}{u}.$$

En remplaçant dans G et en posant $1 + w = (1 + u)(1 + v)$, on trouve

$$G(u, v) = \frac{2}{n(n-1)u} \left(\sum_{j=2}^n (1+w)^j - (1+u) \sum_{j=2}^n (1+v)^j \right).$$

Les deux termes correspondant à $j = 1$ sont égaux, donc on peut faire commencer les deux sommes à 1. Pour $v, w \neq 0$, les sommes géométriques donnent alors

$$G(u, v) = \frac{2}{n(n-1)u} \left((1+w) \frac{(1+w)^n - 1}{w} - (1+u)(1+v) \frac{(1+v)^n - 1}{v} \right),$$

soit

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \left(\frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v} \right).$$

Pour supprimer les quotients qui empêchent de substituer directement $(u, v) = (0, 0)$, utilisons le binôme :

$$\frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (w^{k-1} - v^{k-1}).$$

L'identité

$$a^m - b^m = (a - b) \sum_{\ell=0}^{m-1} a^{m-1-\ell} b^{\ell},$$

vérifiée en développant le produit, et la relation $w - v = u(1 + v)$ donnent

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)(1+v)}{n(n-1)} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{k-2} w^{k-2-\ell} v^{\ell}.$$

Cette dernière expression est polynomiale et valable pour tous les réels u, v . En effet, elle a été obtenue lorsque $u, v, w \neq 0$; les deux membres sont continus et tout point exclu est

limite de points satisfaisant ces trois conditions. Elle permet donc aussi le calcul des dérivées à l'origine.

En particulier, avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$, la somme polynomiale commence par

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3}(w + v) + \binom{n}{4}(w^2 + wv + v^2),$$

puis contient seulement des monômes de degré total au moins 3 en w, v .

c) Question adaptée au programme actuel pour la seule précision du domaine de définition de la corrélation.

Comme $w = u + v + uv$, les deux dérivées demandées sont

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 1 + v, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = 1 + u.$$

Utilisons l'expression polynomiale de II.6.b pour en extraire les coefficients nécessaires. Ce calcul porte sur des polynômes finis ; il ne suppose aucun développement limité multivarié.

Posons

$$\begin{aligned} A &= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad B = \binom{n}{3}, \quad C = \binom{n}{4}, \quad q = \frac{B}{A} = \frac{n-2}{3}, \quad r = \frac{C}{A} \\ &= \frac{(n-2)(n-3)}{12}. \end{aligned}$$

Le nombre A est strictement positif pour $n \geq 2$. Les formules pour q, r restent valables pour $n = 2$ et $n = 3$, les coefficients binomiaux concernés étant nuls.

L'expression de II.6.b s'écrit alors

$$G = (1 + w)(1 + v)(1 + q(w + v) + r(w^2 + wv + v^2) + S(w, v)),$$

où chaque monôme de S a un degré total au moins 3. En multipliant les termes dont le degré est au plus 2, on obtient

$$G = 1 + (1 + q)(w + v) + (q + r)(w^2 + v^2) + (1 + 2q + r)wv + T(w, v),$$

où tous les monômes de T ont un degré total au moins 3.

Comme $w = u + v + uv$ n'a pas de terme constant, les termes de $T(w(u, v), v)$ gardent un degré total au moins 3 en u, v . Ils ne contribuent donc à aucune dérivée d'ordre au plus 2 à l'origine. Pour les autres termes, les contributions utiles sont

$$w + v = u + 2v + uv,$$

$$w^2 = u^2 + 2uv + v^2 + \text{monômes de degré au moins 3},$$

$$wv = uv + v^2 + \text{monômes de degré au moins 3}.$$

En les substituant et en groupant les coefficients, on trouve

$$G = 1 + (1 + q)u + 2(1 + q)v + (q + r)u^2 + (2 + 5q + 3r)uv + (1 + 4q + 3r)v^2 + R(u, v),$$

où R ne contient que des monômes de degré total au moins 3. Les coefficients se simplifient en

$$1 + q = \frac{n+1}{3}, \quad q + r = \frac{(n+1)(n-2)}{12},$$

$$2 + 5q + 3r = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}, \quad 1 + 4q + 3r = \frac{(n+1)(3n-2)}{12}.$$

En dérivant ce polynôme à l'origine, II.6.a donne donc

$$E(X) = \frac{n+1}{3}, \quad E(Y) = \frac{2(n+1)}{3},$$

$$E(X(X-1)) = 2 \frac{(n+1)(n-2)}{12} = \frac{(n+1)(n-2)}{6},$$

$$E(Y(Y-1)) = 2 \frac{(n+1)(3n-2)}{12} = \frac{(n+1)(3n-2)}{6},$$

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

Le facteur 2 dans les deux dérivées pures provient de la dérivée seconde de u^2 ou de v^2 ; il n'apparaît pas dans la dérivée mixte de uv .

On en déduit les seconds moments :

$$E(X^2) = \frac{(n+1)(n-2)}{6} + \frac{n+1}{3} = \frac{n(n+1)}{6},$$

$$E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n-2)}{6} + \frac{2(n+1)}{3} = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}.$$

Les variances et la covariance se calculent maintenant sans réutiliser les moments des questions précédentes :

$$V(X) = \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{18},$$

$$V(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{18},$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{2(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{36}.$$

Pour $n \geq 3$, les deux variances sont strictement positives, d'où $\rho(X, Y) = 1/2$. Pour $n = 2$, $X = 1$ et $Y = 2$ sont constantes, et le coefficient de corrélation n'est pas défini.

La méthode par G retrouve donc tous les moments à partir de la seule loi conjointe. Elle rassemble les calculs dans les coefficients d'un même polynôme, tandis que les questions II.2 à II.5 exploitent successivement les lois marginales, les symétries et les identités entre variables.

Relevé des adaptations

- II.5.b et II.6.c : la demande de coefficient de corrélation de X et Y est restreinte à $n \geq 3$, et le cas $n = 2$ est explicitement demandé et traité. Pour $n = 2$, les deux variables sont constantes et leurs variances sont nulles ; le coefficient de corrélation du PDF n'est donc pas défini. Les lois et tous les calculs de moments restent étudiés pour $n \geq 2$.