



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2000

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On considère un combat entre trois tireurs A, B, C , qui se déroule en une suite d'épreuves jusqu'à l'élimination d'au moins deux des trois tireurs, selon les règles suivantes :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{2}{3}$.
- Lorsque B tire, la probabilité qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{1}{2}$.
- Lorsque C tire, la probabilité qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{1}{3}$.
- Lorsqu'un tireur est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- À chaque épreuve, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

Ainsi, à la première épreuve, A vise B , tandis que B et C visent A .

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

- ABC_n : «à l'issue de la n -ième épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés»;
- AB_n : «à l'issue de la n -ième épreuve, seuls A et B ne sont pas éliminés»;
- BC_n et CA_n sont définis de manière analogue;
- A_n : «à l'issue de la n -ième épreuve, seul A n'est pas éliminé»;
- B_n et C_n sont définis de manière analogue;

- $\emptyset_n$: « à l'issue de la n -ième épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Enfin, ABC_0 est l'événement certain ; $AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0$ et $\emptyset_0$ sont l'événement impossible. Une fois le combat terminé, l'état atteint est conservé pour tous les indices suivants. On note p la probabilité.

Partie I

On établit dans cette partie quelques résultats probabilistes préliminaires.

1. Calcul de probabilités

- Si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé, exprimer $p(U \cup V)$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.
- En déduire la probabilité que, lors d'une épreuve à laquelle participent A , B et C , A rate son tir et que B ou C réussisse son tir.
- En déduire la probabilité que, lors d'une épreuve à laquelle participent A , B et C , A réussisse son tir et que B ou C réussisse son tir.

2. Détermination de probabilités conditionnelles

- Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout entier naturel n .

Dans la suite, on ne considérera donc que les événements $ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n$ et $\emptyset_n$.

Dans les questions b) à f), on prend $n \geq 1$; les événements conditionnants rencontrés ont alors une probabilité strictement positive. Les transitions à partir de chacun des états sont déterminées par les règles du combat, y compris lorsque cet état n'est pas réalisé à l'instant initial.

- Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1} \mid ABC_n)$.

- c) Expliciter $p(BC_{n+1} \mid ABC_n)$ à l'aide de la question 1, puis donner $p(CA_{n+1} \mid ABC_n)$.
- d) Expliciter $p(A_{n+1} \mid ABC_n)$, $p(B_{n+1} \mid ABC_n)$ et $p(C_{n+1} \mid ABC_n)$.
- e) Expliciter $p(A_{n+1} \mid CA_n)$, $p(B_{n+1} \mid BC_n)$, $p(C_{n+1} \mid CA_n)$ et $p(C_{n+1} \mid BC_n)$.
- f) Expliciter $p(\emptyset_{n+1} \mid ABC_n)$, $p(\emptyset_{n+1} \mid BC_n)$ et $p(\emptyset_{n+1} \mid CA_n)$.

3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

On note T le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est-à-dire au-delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

a) Quelle est la probabilité de l'événement $[T = 1]$?

b) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n.$$

c) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants, pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n.$$

Pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n$.

d) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants, pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n.$$

Pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$.

e) Soit $n \geq 2$. Calculer $p(T > n)$, probabilité que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la n -ième épreuve. En déduire $p(T = n)$; on vérifiera que cette formule redonne, pour $n = 1$, le résultat de la question 3.a.

- f) Vérifier que la série de terme général $p(T = n)$, pour $n \geq 1$, a pour somme 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$.

Partie II

Dans cette partie, on détermine les probabilités que A , B et C remportent le combat.

1. Expression de la matrice de transition M

- a) On considère la matrice colonne E_n à sept lignes dont les éléments sont, dans cet ordre,

$$p(ABC_n), p(BC_n), p(CA_n), p(A_n), p(B_n), p(C_n), p(\emptyset_n).$$

Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant, pour tout entier naturel n ,

$$E_{n+1} = ME_n.$$

On vérifiera que la somme des coefficients de chacune des sept colonnes de M est égale à 1.

Dans la convention où les probabilités forment une matrice ligne $L_n = {}^t(E_n)$, la matrice de transition est ${}^tM$ et la relation devient $L_{n+1} = L_n {}^tM$. On conserve ici la convention colonne pour les calculs.

- b) En déduire E_n en fonction de n , de M et de E_0 .

2. Calcul des puissances de la matrice M

- a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3, notées U' et U'' , et deux matrices à quatre lignes et trois colonnes, notées V' et V'' . On forme les matrices carrées

d'ordre 7

$$M' = \begin{pmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{pmatrix}, \quad M'' = \begin{pmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{pmatrix},$$

où O est la matrice nulle à trois lignes et quatre colonnes, et I_4 la matrice identité d'ordre

4. Vérifier, à l'aide des règles du produit matriciel, que

$$M'M'' = \begin{pmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{pmatrix}.$$

b) Expliciter les matrices U et V telles que

$$M = \begin{pmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{pmatrix}.$$

c) Établir par récurrence, pour $n \geq 1$, l'égalité

$$M^n = \begin{pmatrix} U^n & O \\ V + VU + \dots + VU^{n-1} & I_4 \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalisation de la matrice U

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de U , avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :

- la première composante de V_1 vaut 1 ;

- la troisième composante de V_2 vaut 1 ;
 - la deuxième composante de V_3 vaut 1.
- b)** On note P la matrice d'ordre 3 dont les colonnes sont, dans cet ordre, V_1 , V_2 et V_3 .
 Expliciter P^{-1} et préciser $D = P^{-1}UP$.

4. Calcul de la limite des puissances de la matrice M

- a)** Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$.
- b)** On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X de mêmes dimensions lorsque chaque coefficient de X_n converge vers le coefficient correspondant de X .

On admet, sous réserve de l'existence des limites, que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter, à l'aide des résultats précédents, les limites de

$$(D^n), \quad (I_3 + D + \dots + D^{n-1}),$$

puis celles de

$$(U^n), \quad (I_3 + U + \dots + U^{n-1}), \quad (V + VU + \dots + VU^{n-1}).$$

- c)** En déduire les limites de (M^n) et de (E_n) .
- d)** Vérifier que les suites $(p(ABC_n))$, $(p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0. Expliciter sous forme de fractions irréductibles les limites de $(p(A_n))$, $(p(B_n))$, $(p(C_n))$ et $(p(\emptyset_n))$. Comparer les probabilités respectives que A , B et C remportent le combat.