



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

2000

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Calcul de probabilités

- a) La réunion se décompose en la réunion disjointe de $U \setminus V$, de $V \setminus U$ et de $U \cap V$. En additionnant les probabilités de ces trois événements, tandis que $p(U) + p(V)$ compte deux fois l'intersection, on obtient

$$p(U \cup V) = p(U) + p(V) - p(U \cap V).$$

- b) Notons R_A , R_B et R_C les événements «le tireur indiqué réussit son tir» pour l'épreuve considérée. Les tirs de B et C sont indépendants, donc

$$p(R_B \cup R_C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Le tir de A est indépendant des deux autres tirs; le lemme des coalitions permet de séparer $\overline{R_A}$ et $R_B \cup R_C$. Ainsi,

$$p(\overline{R_A} \cap (R_B \cup R_C)) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

- c) Avec la même indépendance,

$$p(R_A \cap (R_B \cup R_C)) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Lors de ces tirs simultanés, un tireur atteint exécute néanmoins son propre tir de l'épreuve : les deux éliminations peuvent donc se produire ensemble.

2. Détermination de probabilités conditionnelles

- a) Le tireur C ne peut être éliminé à partir de l'état où les trois tireurs sont présents : A vise B , tandis que B et C visent A . L'état où seuls A et B sont présents ne peut donc pas être atteint directement depuis cet état.

De plus, un tireur éliminé ne revient pas. Pour atteindre pour la première fois un état où A et B seraient présents et C absent, il faudrait donc nécessairement partir de l'état où tous trois sont présents, ce qui vient d'être exclu. Comme AB_0 est impossible, AB_n est impossible pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans les questions suivantes, une transition dépend seulement des tireurs encore présents. L'indépendance de tous les tirs implique que les nouveaux tirs sont indépendants des résultats passés. Pour $n \geq 1$, les événements conditionnants sont de probabilité positive : on peut rester dans l'état ABC pendant n épreuves, avec probabilité $(1/9)^n > 0$; on peut aussi y rester pendant $n - 1$ épreuves, puis passer en BC ou en CA , chacune de ces transitions ayant une probabilité $2/9 > 0$ calculée ci-dessous.

b) Pour conserver les trois tireurs, chacun doit manquer son tir. Par indépendance,

$$p(ABC_{n+1} \mid ABC_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

c) Pour passer de ABC à BC , A doit manquer B , et au moins l'un des tirs de B et de C doit atteindre A . La question I.1.b donne

$$p(BC_{n+1} \mid ABC_n) = \frac{2}{9}.$$

Pour passer de ABC à CA , A doit atteindre B , et les tirs de B et de C doivent tous deux manquer A . Ainsi,

$$p(CA_{n+1} \mid ABC_n) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

d) À partir de l'état ABC , aucun tir ne vise C , qui survit donc nécessairement à cette épreuve. Il est impossible d'obtenir A seul ou B seul :

$$p(A_{n+1} \mid ABC_n) = 0, \quad p(B_{n+1} \mid ABC_n) = 0.$$

Pour obtenir C seul, il faut éliminer B grâce au tir de A et éliminer A grâce à au moins l'un des tirs de B et de C . La question I.1.c donne

$$p(C_{n+1} \mid ABC_n) = \frac{4}{9}.$$

Les quatre possibilités accessibles depuis ABC ont bien pour probabilités $1/9$, $2/9$, $2/9$ et $4/9$, dont la somme vaut 1.

e) Question adaptée au programme actuel : l'indice $n \geq 1$ est précisé pour que les conditionnements par BC_n et CA_n aient un sens. À l'instant initial, ces deux événements sont impossibles ; les transitions du modèle restent définies à partir de ces états sans leur attribuer de probabilités conditionnelles sur un événement nul.

À partir de CA , les deux tireurs se visent mutuellement. Pour que A reste seul, A doit réussir et C manquer ; pour que C reste seul, A doit manquer et C réussir.

L'indépendance donne

$$p(A_{n+1} \mid CA_n) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$p(C_{n+1} \mid CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

À partir de BC , on obtient de même

$$p(B_{n+1} \mid BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$p(C_{n+1} \mid BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

f) Question adaptée au programme actuel : les conditionnements par BC_n et CA_n sont également pris pour $n \geq 1$.

Depuis ABC , C ne peut pas être éliminé à cette épreuve ; par conséquent,

$$p(\emptyset_{n+1} \mid ABC_n) = 0.$$

Depuis un état à deux tireurs, tous deux sont éliminés si chacun réussit son tir. Ainsi,

$$p(\emptyset_{n+1} \mid BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$p(\emptyset_{n+1} \mid CA_n) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

On utilisera aussi les probabilités de conservation des deux tireurs :

$$p(BC_{n+1} \mid BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$p(CA_{n+1} \mid CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Chaque famille de transitions est normalisée : depuis BC , $1/3 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 1$;
depuis CA , $2/9 + 4/9 + 1/9 + 2/9 = 1$.

3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

- a) Le combat s'achève dès la première épreuve si et seulement si C est le seul survivant à son issue. Les autres états comportant au plus un survivant ne sont pas accessibles depuis ABC en une seule épreuve. La question I.2.d donne donc

$$p(T = 1) = \frac{4}{9}.$$

- b) Pour rester dans l'état ABC jusqu'à l'épreuve n , tous les tirs des n épreuves doivent manquer leur cible. Chaque épreuve a une probabilité $1/9$ de conserver cet état et les tirs des différentes épreuves sont indépendants. Par conséquent,

$$p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

Comme aucune élimination ne peut être annulée, cet événement est simplement ABC_n . La formule vaut aussi pour $n = 0$ et $n = 1$, avec la convention $p(ABC_0) = 1$.

- c) Notons $F_{k,n}$ l'événement affiché dans la question. Il décrit k épreuves conservant ABC , une transition vers CA , puis $n - k - 1$ épreuves conservant CA . Les probabilités de transition calculées en I.2 et l'indépendance des tirs donnent

$$p(F_{k,n}) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{2}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}.$$

Deux indices distincts correspondent à deux premières dates différentes d'élimination de B ; les événements $F_{k,n}$ sont donc deux à deux incompatibles. Leur réunion est CA_n , car cet état ne peut être atteint que depuis ABC , puis conservé. On additionne :

$$p(CA_n) = \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \left(\frac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Ainsi,

$$p(CA_n) = 2 \left[\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right].$$

La formule est aussi valable pour $n = 0$ et $n = 1$ et donne respectivement 0 et $2/9$.

- d) Notons $G_{k,n}$ l'événement affiché. Il décrit k épreuves conservant ABC , une transition vers BC , puis $n - k - 1$ épreuves conservant BC . Sa probabilité vaut

$$p(G_{k,n}) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}.$$

Ces événements sont deux à deux incompatibles, car la première élimination de A ne peut survenir à deux dates différentes. Leur réunion est BC_n . Ainsi,

$$p(BC_n) = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

On obtient donc

$$p(BC_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

Cette formule donne encore les bonnes valeurs 0 et $2/9$ pour $n = 0$ et $n = 1$.

- e) Le combat se poursuit après l'épreuve n si et seulement si son état est ABC , BC ou CA , puisque l'état AB est impossible. Ces trois événements sont incompatibles. En utilisant les questions précédentes,

$$p(T > n) = p(ABC_n) + p(BC_n) + p(CA_n) = 2 \left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

La formule est valable pour tout $n \geq 0$; elle donne $p(T > 0) = 1$ et $p(T > 1) = 5/9$. Les trois suites géométriques tendent vers 0. Le combat s'achève donc presque sûrement : les événements $[T > n]$ décroissent, et leur intersection, l'événement de non-terminaison, a pour probabilité la limite 0.

Pour tout $n \geq 1$, les événements $[T = n]$ et $[T > n]$ partitionnent $[T > n - 1]$. Ainsi,

$$p(T = n) = p(T > n - 1) - p(T > n),$$

d'où

$$p(T = n) = \frac{14}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{16}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}.$$

Pour $n = 1$, le membre de droite vaut $14/9 + 2/3 - 16/9 = 4/9$, conformément à I.3.a.

- f) Les séries géométriques employées ont des raisons de valeur absolue strictement inférieure à 1. La somme de la loi est donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(T = n) = \frac{14/9}{1 - 2/9} + \frac{2/3}{1 - 1/3} - \frac{16/9}{1 - 1/9} = 2 + 1 - 2 = 1.$$

Méthode 1 — Calculer directement le premier moment.

Avant d'utiliser la linéarité des séries, on justifie la convergence absolue :

$$0 \leq np(T = n) \leq \frac{14}{9}n \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{16}{9}n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}.$$

Chacune des séries majorantes converge, d'après la première série géométrique dérivée. La variable T , à valeurs positives, admet donc une espérance. Avec

$$\sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = 1/(1-x)^2$$

pour $|x| < 1$,

$$E(T) = \frac{14/9}{(1 - 2/9)^2} + \frac{2/3}{(1 - 1/3)^2} - \frac{16/9}{(1 - 1/9)^2} = \frac{18}{7} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{51}{28}.$$

Méthode 2 — Sommer les probabilités de poursuite du combat.

Établissons la formule nécessaire plutôt que de la supposer connue. Posons

$s_j = p(T > j)$. Pour tout entier $N \geq 1$, un calcul sur des sommes finies donne

$$\sum_{n=1}^N np(T = n) = \sum_{n=1}^N n(s_{n-1} - s_n) = \sum_{j=0}^{N-1} s_j - Ns_N.$$

La formule de I.3.e montre que $Ns_N \rightarrow 0$, car $Nr^N \rightarrow 0$ lorsque $0 < r < 1$, et que

$$\sum s_j$$

converge. Le passage à la limite établit à la fois l'existence de l'espérance et l'identité

$$E(T) = \sum_{j=0}^{+\infty} p(T > j) = \frac{2}{1 - 2/9} + \frac{1}{1 - 1/3} - \frac{2}{1 - 1/9} = \frac{18}{7} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{51}{28}.$$

La première méthode utilise directement la loi ; la seconde est particulièrement efficace quand les probabilités de dépassement sont plus simples que les probabilités ponctuelles. La fraction $51/28$ est irréductible, car $51 = 3 \times 17$ et $28 = 4 \times 7$.

Partie II

1. Expression de la matrice de transition M

- a) Les sept événements décrivant l'état à l'issue de l'épreuve n forment un système complet, l'état AB étant impossible. Pour appliquer la formule des probabilités totales, on utilise les transitions données par les règles du modèle ; un état dont la probabilité est nulle apporte un terme nul. Cela évite de conditionner par un événement impossible à l'instant initial.

Avec une matrice colonne, la colonne associée à un état de départ contient les

probabilités des états d'arrivée. Les transitions de la partie I donnent

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les quatre dernières colonnes expriment que les états terminaux sont conservés après l'arrêt du combat. Pour les trois premières colonnes, les sommes valent respectivement

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 1,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1,$$

$$\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = 1.$$

Chacune des quatre autres colonnes contient un unique coefficient égal à 1. Toutes les colonnes ont donc pour somme 1, et les probabilités totales donnent $E_{n+1} = ME_n$ pour tout $n \geq 0$.

Question adaptée au programme actuel : la convention de l'annale est explicitement reliée à la convention ligne. En transposant, on obtient $L_{n+1} = L_n {}^tM$, où $L_n = {}^t(E_n)$. La matrice ${}^tM$ a ses lignes de somme 1, comme la matrice de transition dans la convention officielle.

b) La relation de récurrence s'itère : pour $n = 0$, $E_0 = M^0 E_0$; si $E_n = M^n E_0$, alors

$E_{n+1} = MM^n E_0 = M^{n+1} E_0$. Par récurrence,

$$E_n = M^n E_0, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, E_n est la première colonne de M^n .

2. Calcul des puissances de la matrice M

- a) Question adaptée au programme actuel : le bloc supérieur gauche du produit est rectifié en $U'U''$; le PDF affiche U' .

Les dimensions permettent les produits indiqués. Les quatre blocs du produit sont

$$U'U'' + OV'' = U'U'', \quad U'O + OI_4 = O,$$

$$V'U'' + I_4V'' = V'U'' + V'', \quad V'O + I_4I_4 = I_4.$$

Par conséquent,

$$M'M'' = \begin{pmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{pmatrix}.$$

- b) La partition après les trois premiers états sépare les états où le combat continue des

quatre états terminaux. On lit dans M

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Les dimensions sont respectivement 3×3 et 4×3 , et $M = \begin{pmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{pmatrix}$.

- c) Question adaptée au programme actuel : le bloc supérieur gauche de M^n est U^n , et non U comme dans la formule imprimée.

Pour $n = 1$, la formule se réduit à la décomposition de II.2.b. Supposons-la établie pour un entier $n \geq 1$ et posons $W_n = V + VU + \dots + VU^{n-1}$. Le produit par blocs de II.2.a donne

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} U^n U & O \\ W_n U + V & I_4 \end{pmatrix}.$$

Or

$$W_n U + V = VU + VU^2 + \dots + VU^n + V = V + VU + \dots + VU^n.$$

C'est la formule au rang $n + 1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$M^n = \begin{pmatrix} U^n & O \\ V \sum_{j=0}^{n-1} U^j & I_4 \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalisation de la matrice U

- a) On cherche les éléments propres par des équations linéaires réelles. Si $X = {}^t(x, y, z)$ vérifie $UX = \lambda X$, alors

$$\left(\frac{1}{9} - \lambda\right)x = 0, \quad \frac{2}{9}x + \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)y = 0, \quad \frac{2}{9}x + \left(\frac{2}{9} - \lambda\right)z = 0.$$

Si λ est différent des trois nombres $1/9$, $1/3$ et $2/9$, la première équation impose $x = 0$, puis les deux autres imposent $y = z = 0$. Un vecteur propre étant non nul, les seules valeurs possibles sont donc ces trois nombres.

Pour $\lambda_1 = 1/9$, les deux dernières équations deviennent $x + y = 0$ et $2x + z = 0$. L'espace propre est la droite engendrée par ${}^t(1, -1, -2)$. La normalisation demandée donne

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = 2/9$, la première équation impose $x = 0$, puis la deuxième impose $y = 0$; la troisième n'impose aucune condition sur z . Ainsi,

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_3 = 1/3$, la première équation impose $x = 0$, puis la troisième impose $z = 0$; y est libre. Ainsi,

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque vecteur affiché est non nul et vérifie l'équation propre correspondante. Les trois nombres sont donc effectivement valeurs propres et

$$\lambda_1 = \frac{1}{9} < \lambda_2 = \frac{2}{9} < \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

b) On forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont des vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes ; elles sont donc libres et forment une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice P est inversible. Pour calculer l'inverse sans déterminant, on résout ${}^t(P(a, b, c)) = {}^t(x, y, z)$:

$$a = x, \quad -a + c = y, \quad -2a + b = z,$$

d'où $a = x$, $b = 2x + z$ et $c = x + y$. Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les identités $UV_j = \lambda_j V_j$ donnent $UP = PD$, donc

$$D = P^{-1}UP = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4. Calcul de la limite des puissances de la matrice M

- a) Pour tout $n \geq 0$, les puissances d'une matrice diagonale s'obtiennent en élevant chaque coefficient diagonal à la puissance n :

$$D^n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{9})^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{9})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 1$, la somme de matrices diagonales reste diagonale. En utilisant la somme géométrique finie pour chacune des trois raisons, toutes différentes de 1,

$$I_3 + D + \dots + D^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8}(1 - (\frac{1}{9})^n) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7}(1 - (\frac{2}{9})^n) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{3})^n) \end{pmatrix}.$$

- b) Les trois raisons appartiennent à $]0, 1[$. Leurs puissances tendent vers 0, d'où

$$D^n \rightarrow O_3, \quad \sum_{j=0}^{n-1} D^j \rightarrow H = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La relation $U = PDP^{-1}$ donne, par récurrence sur les puissances, $U^n = PD^nP^{-1}$.

L'admission concernant les produits, dont chaque facteur a une limite, entraîne

$$U^n \rightarrow PO_3P^{-1} = O_3.$$

Par linéarité des sommes finies,

$$\sum_{j=0}^{n-1} U^j = P \left(\sum_{j=0}^{n-1} D^j \right) P^{-1} \longrightarrow PHP^{-1} = S.$$

Calculons le produit pour expliciter cette limite. Avec $h_1 = 9/8$, $h_2 = 9/7$ et $h_3 = 3/2$, les matrices de II.3 donnent

$$PHP^{-1} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ h_3 - h_1 & h_3 & 0 \\ 2(h_2 - h_1) & 0 & h_2 \end{pmatrix}.$$

Les différences sont $h_3 - h_1 = 3/8$ et $2(h_2 - h_1) = 9/28$. Ainsi,

$$S = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{9}{28} & 0 & \frac{9}{7} \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$V + VU + \dots + VU^{n-1} = V \sum_{j=0}^{n-1} U^j$$

converge vers VS . En multipliant chaque ligne de V par S , on obtient

$$VS = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{67}{112} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ \frac{15}{112} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = W.$$

Pour vérifier en particulier les deux coefficients les moins immédiats, la première colonne donne

$$\frac{4}{9} \times \frac{9}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{9} \times \frac{9}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{28} = \frac{67}{112},$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{9}{28} = \frac{1}{16} + \frac{1}{14} = \frac{15}{112}.$$

c) On applique les limites de II.4.b à chacun des blocs de la formule de II.2.c :

$$M^n \longrightarrow Q = \begin{pmatrix} O_3 & O \\ W & I_4 \end{pmatrix}.$$

Cette écriture précise l'intégralité de la matrice limite, puisque W vient d'être explicité.

Comme $E_n = M^n E_0$, et que E_0 est constant,

$$E_n \longrightarrow QE_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{67}{112} \\ \frac{15}{112} \end{pmatrix}.$$

La somme des quatre dernières composantes est bien $(16 + 14 + 67 + 15)/112 = 1$.

d) Méthode 1 — Lire les limites de la loi de l'état.

Les trois premières composantes de la limite de II.4.c sont nulles :

$$p(ABC_n) \rightarrow 0, \quad p(BC_n) \rightarrow 0, \quad p(CA_n) \rightarrow 0.$$

Cela concorde avec les expressions géométriques de I.3.b à I.3.d. Les quatre autres composantes donnent

$$p(A_n) \rightarrow \frac{1}{7}, \quad p(B_n) \rightarrow \frac{1}{8}, \quad p(C_n) \rightarrow \frac{67}{112}, \quad p(\emptyset_n) \rightarrow \frac{15}{112}.$$

Les événements A_n sont croissants : une fois A seul survivant, cet état est conservé. Leur réunion est l'événement « A remporte le combat ». La continuité croissante de la probabilité montre que sa probabilité est $\lim p(A_n) = 1/7$. Le même raisonnement s'applique aux trois autres états terminaux. Ainsi, les limites calculées sont bien les probabilités des différentes issues finales, et non seulement des probabilités à une date donnée.

Comme $1/7 = 16/112$ et $1/8 = 14/112$, on a

$$\frac{67}{112} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8}.$$

Le tireur C , pourtant le moins précis, a la probabilité de victoire la plus élevée. Il n'est pas visé lorsque les trois tireurs sont encore présents; il peut donc profiter de l'élimination mutuelle de ses deux rivaux. La probabilité d'absence de vainqueur est $15/112$.

Méthode 2 — Conditionner par la première épreuve qui modifie l'état.

Retrouvons directement les probabilités finales par des équations de premier pas. À partir de CA , la probabilité de conserver cet état pendant n épreuves est $(2/9)^n$, qui tend vers 0; le duel s'achève donc presque sûrement. Si a_{CA} désigne la probabilité finale de victoire de A dans ce duel, la première épreuve donne

$$a_{CA} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}a_{CA}, \quad a_{CA} = \frac{4}{7}.$$

De même, la victoire de C et l'élimination des deux tireurs ont pour probabilités

$$c_{CA} = \frac{1/9}{1 - 2/9} = \frac{1}{7}, \quad z_{CA} = \frac{2/9}{1 - 2/9} = \frac{2}{7}.$$

À partir de BC , la probabilité de conserver cet état pendant n épreuves est $(1/3)^n \rightarrow 0$. Les mêmes équations donnent

$$b_{BC} = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}, \quad c_{BC} = \frac{1/6}{1 - 1/3} = \frac{1}{4}, \quad z_{BC} = \frac{1}{4}.$$

Notons a, b, c, z les probabilités finales de victoire de A , de B , de C , et d'absence de vainqueur, en partant de ABC . La première épreuve reste dans ABC avec probabilité $1/9$, passe en BC ou en CA avec probabilité $2/9$ chacune, et laisse directement C seul avec probabilité $4/9$. Par les probabilités totales,

$$a = \frac{1}{9}a + \frac{2}{9}\frac{4}{7}, \quad b = \frac{1}{9}b + \frac{2}{9}\frac{1}{2},$$

$$c = \frac{1}{9}c + \frac{2}{9}\frac{1}{4} + \frac{2}{9}\frac{1}{7} + \frac{4}{9}, \quad z = \frac{1}{9}z + \frac{2}{9}\frac{1}{4} + \frac{2}{9}\frac{2}{7}.$$

En divisant chaque équation par $1 - 1/9 = 8/9$, on obtient

$$a = \frac{1}{7}, \quad b = \frac{1}{8}, \quad c = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{28} = \frac{67}{112}, \quad z = \frac{1}{16} + \frac{1}{14} = \frac{15}{112}.$$

On retrouve donc les quatre limites et le classement $c > a > b$. La première méthode suit les puissances matricielles demandées et traite tous les états de départ en même temps ; la seconde est plus courte pour quelques probabilités d'absorption et met en évidence le rôle des duels intermédiaires.

Relevé des adaptations

- Préambule, I.2.b à I.2.f et II.1.a : maintien des états terminaux après l'arrêt du combat et précision des indices $n \geq 1$ pour les probabilités conditionnelles issues de BC_n et CA_n . Les transitions à partir de ces états sont définies par les règles du modèle ; aucun conditionnement par les événements impossibles BC_0 ou CA_0 n'est utilisé. La convention colonne de l'annale est conservée et reliée explicitement à la convention ligne par transposition.
- II.2.a : rectification du bloc supérieur gauche de $M'M''$, imprimé U' dans le PDF, en $U'U''$; cette correction est nécessaire à la règle du produit par blocs.
- II.2.c : rectification du bloc supérieur gauche de M^n , imprimé U dans le PDF, en U^n ; les autres blocs et la récurrence demandée sont conservés.