



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques III — Option économique

1999

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

1. Étude des séries dérivées de la série géométrique.

Dans toute cette question, x désigne un réel tel que $0 \leq x < 1$.

a) Calculer, pour tout entier naturel n , les deux sommes suivantes :

$$\sum_{j=0}^n x^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n jx^{j-1}.$$

b) Déterminer les limites de x^n , de nx^n et des deux sommes précédentes lorsque n tend vers $+\infty$.

On admet, pour la seule fonction $x \mapsto 1/(1-x)$ et pour tout entier $k \geq 1$, l'identité particulière suivante, où $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k} = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right). \quad (\text{R})$$

c) Exprimer ainsi $1/(1-x)^3$ sous la forme d'une série.

d) Expliciter la dérivée k -ième de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)$. Effectuer dans la relation (R) le changement d'indice $n = m - k$ et déduire de ces résultats l'expression de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n$$

en fonction de k et de x .

2. Application à l'étude de la loi binomiale négative.

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes et menant au succès avec la probabilité p , où $0 < p < 1$.

Pour tout entier $k \geq 1$, X_k désigne le numéro de l'épreuve où intervient le k -ième succès. La variable X_k prend donc ses valeurs parmi les entiers supérieurs ou égaux à k .

- a) On suppose $k = 1$. Préciser la loi de X_1 , la probabilité $P(X_1 = n + 1)$ pour tout entier naturel n , et l'espérance $E(X_1)$.
- b) On suppose $k > 1$. Déterminer la probabilité d'obtenir $k - 1$ succès en $n + k - 1$ épreuves, puis en déduire la probabilité $P(X_k = n + k)$ pour tout entier naturel n .
- c) À l'aide des résultats précédents, vérifier que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_k = n + k)$$

a pour somme 1, puis calculer l'espérance $E(X_k)$ en fonction de p et de k . Comment peut-on interpréter ce dernier résultat ?

On dit alors que X_k suit la loi binomiale négative de paramètres p et k ainsi définie.

Partie II

On étudie la croissance d'une population au cours du temps. Pour tout réel $t \geq 0$, $X(t)$ désigne le nombre d'individus de la population à l'instant t . On suppose que $X(0) = k$, où $k \in \mathbb{N}$ est le nombre initial d'individus.

Les probabilités de transition ci-dessous décrivent le modèle à partir d'un effectif donné. Elles s'interprètent comme des probabilités conditionnelles sachant $X(t) = n + k$ lorsque cet événement a une probabilité strictement positive. Si cette probabilité est nulle, aucune probabilité conditionnelle par cet événement n'est utilisée ; les probabilités du modèle à partir de cet état restent données et sont multipliées par $P(X(t) = n + k) = 0$ dans la formule des probabilités totales.

1. Croissance de la population par les naissances, avec $k > 0$.

On suppose qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tous $t \geq 0$, $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, les probabilités de transition à partir de l'effectif $n + k$ vérifient :

- la probabilité d'un effectif strictement inférieur à $n + k$ à l'instant $t + h$ est nulle ;
- la probabilité d'un effectif égal à $n + k + 1$ à l'instant $t + h$ vaut $\lambda(n + k)h + h\varepsilon'_n(h)$;
- la probabilité d'un effectif strictement supérieur à $n + k + 1$ à l'instant $t + h$ vaut $h\varepsilon''_n(h)$.

Les fonctions ε'_n et ε''_n sont indépendantes de t et tendent vers 0 lorsque h tend vers 0^+ .

Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité d'une naissance pendant une courte durée h est proportionnelle à h et au nombre d'individus présents, et que la probabilité de plusieurs naissances est négligeable devant celle d'une naissance.

Préciser dans ce contexte la probabilité de transition d'un effectif $n + k$ à ce même effectif pendant la durée h .

a) Établir, à l'aide de la formule des probabilités totales,

$$P(X(t + h) = k) = (1 - \lambda kh)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h),$$

où, pour t fixé, $\varepsilon_0(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0^+ .

En déduire que $p_k : t \mapsto P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée à droite vérifie

$$p'_k(t) = -\lambda kp_k(t).$$

On admet que cette formule est aussi valable pour la dérivée de p_k sur $]0, +\infty[$; en 0, la dérivée considérée est celle à droite.

b) Dériver la fonction $t \mapsto e^{\lambda kt}p_k(t)$ sur $\mathbb{R}_+$, puis, en tenant compte de

$p_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $p_k(t)$ en fonction de k , λ et t .

c) Établir, pour $n \geq 1$,

$$P(X(t+h) = n+k) = (1 - \lambda(n+k)h)P(X(t) = n+k) \\ + \lambda(n+k-1)hP(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h),$$

où, pour t fixé, $\varepsilon_n(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0^+ .

En déduire que $p_{n+k} : t \mapsto P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$p'_{n+k}(t) = -\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t).$$

On admet que cette formule est aussi valable pour la dérivée sur $]0, +\infty[$; en 0, la dérivée est celle à droite.

d) Dériver la fonction $t \mapsto e^{\lambda(n+k)t}p_{n+k}(t)$ et en déduire par récurrence sur n :

$$p_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k) = \binom{n+k-1}{k-1} e^{-\lambda kt} (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

e) Reconnaître, à l'aide des résultats de la partie I, la loi de $X(t)$ et déterminer son espérance en fonction de λ , k et t .

2. Croissance de la population par l'immigration.

On suppose qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que, pour tous $t \geq 0$, $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, les probabilités de transition à partir de l'effectif $n+k$ vérifient :

- la probabilité d'un effectif strictement inférieur à $n+k$ à l'instant $t+h$ est nulle;
- la probabilité d'un effectif égal à $n+k+1$ à l'instant $t+h$ vaut $\mu h + h\varepsilon'_n(h)$;
- la probabilité d'un effectif strictement supérieur à $n+k+1$ à l'instant $t+h$ vaut $h\varepsilon''_n(h)$.

Les fonctions ε'_n et ε''_n sont indépendantes de t et tendent vers 0 lorsque h tend vers 0^+ .

La population ne peut donc pas diminuer ; la probabilité d'arrivée d'un immigré pendant une courte durée h est proportionnelle à h , indépendamment de l'effectif présent, et la probabilité de plusieurs arrivées est négligeable devant celle d'une arrivée.

Préciser la probabilité de transition d'un effectif $n + k$ à ce même effectif pendant la durée h .

a) Établir, à l'aide de la formule des probabilités totales,

$$P(X(t+h) = k) = (1 - \mu h)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h),$$

où, pour t fixé, $\varepsilon_0(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0^+ .

En déduire que $q_k : t \mapsto P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$q'_k(t) = -\mu q_k(t).$$

On admet que cette formule est aussi valable pour la dérivée sur $]0, +\infty[$; en 0, la dérivée est celle à droite.

b) Dérivée la fonction $t \mapsto e^{\mu t} q_k(t)$, puis, en tenant compte de $q_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $q_k(t)$ en fonction de μ et de t .

c) Établir, pour $n \geq 1$,

$$P(X(t+h) = n+k) = (1 - \mu h)P(X(t) = n+k) + \mu h P(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h),$$

où, pour t fixé, $\varepsilon_n(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0^+ .

En déduire que $q_{n+k} : t \mapsto P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que

$$q'_{n+k}(t) = -\mu q_{n+k}(t) + \mu q_{n+k-1}(t).$$

On admet que cette formule est aussi valable pour la dérivée sur $]0, +\infty[$; en 0, la dérivée est celle à droite.

- d) Dériver la fonction $t \mapsto e^{\mu t} q_{n+k}(t)$ et en déduire $q_{n+k}(t)$ pour $n = 1, 2, 3$, puis dans le cas général.
- e) Reconnaître la loi de $X(t) - k$ et donner l'espérance $E(X(t))$ en fonction de μ , k et t .