



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques III — Option économique

1999

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Étude des séries dérivées de la série géométrique.

a) Posons

$$A_n(x) = \sum_{j=0}^n x^j$$

et

$$B_n(x) = \sum_{j=1}^n jx^{j-1}.$$

La seconde somme est vide et vaut 0 si $n = 0$. Les deux méthodes suivantes ne concernent que des sommes finies.

Méthode 1 — Dériver une identité polynomiale finie.

Comme $x \neq 1$, la somme géométrique donne

$$A_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Pour $n \geq 1$, on dérive cette égalité entre fonctions dérivables :

$$B_n(x) = A'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Pour $n = 0$, on a directement $A_0(x) = 1$ et $B_0(x) = 0$. La formule de B_n reste valable en interprétant le terme constant x^0 comme 1, y compris en $x = 0$.

Méthode 2 — Soustraire deux sommes décalées.

Pour $n \geq 1$, écrivons

$$B_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}, \quad xB_n(x) = x + 2x^2 + \cdots + nx^n.$$

La soustraction donne

$$(1-x)B_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} - nx^n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n.$$

On divise par $1-x > 0$:

$$B_n(x) = \frac{1-x^n - nx^n(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

La dérivation d'une somme finie est la méthode la plus directe. La soustraction de sommes décalées permet de retrouver la même expression sans dériver et s'applique à d'autres sommes pondérées.

b) Si $x = 0$, x^n et nx^n sont nuls pour $n \geq 1$. Si $0 < x < 1$, la suite géométrique x^n tend vers 0, et les croissances comparées donnent $nx^n \rightarrow 0$. Par exemple, en écrivant $x^n = e^{-cn}$ avec $c = -\ln x > 0$, on obtient $ne^{-cn} \rightarrow 0$.

Les formules de a) donnent donc, pour tout $0 \leq x < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n x^j = \frac{1}{1-x}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n jx^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Pour la seconde limite, $(n+1)x^n = nx^n + x^n \rightarrow 0$ et $nx^{n+1} = x(nx^n) \rightarrow 0$. Ces limites justifient la convergence des deux séries, directement à partir de leurs sommes partielles.

Question adaptée au programme actuel : l'admission qui suit est limitée à la fonction géométrique précise de l'énoncé. Résultat admis dans cette version adaptée : pour tout entier $k \geq 1$ et pour $0 \leq x < 1$,

$$\sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1) \cdots (m-k+1)x^{m-k} = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

Cette identité (R) permet les calculs particuliers de c) et d). Elle ne constitue pas une règle générale de dérivation de séries.

c) La fonction $x \mapsto (1-x)^{-1}$ est deux fois dérivable sur $] -\infty, 1[$, avec

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

La relation (R) pour $k = 2$ donne

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)x^{m-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n,$$

où le changement d'indice est $n = m - 2$. Ce sont des séries convergentes pour $0 \leq x < 1$; en $x = 0$, seul le terme constant contribue.

d) Méthode 1 — Utiliser l'identité particulière (R) .

On démontre par récurrence sur l'entier $k \geq 0$ que

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Pour $k = 0$, il s'agit de la fonction elle-même. Si la formule est vraie à l'ordre k , la dérivée de son membre de droite est

$$k!(k+1)(1-x)^{-k-2} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}.$$

La récurrence est établie. Cette démonstration porte uniquement sur les dérivées successives d'une fonction explicite.

Dans (R) , on pose $n = m - k$. Le coefficient devient

$$m(m-1)\cdots(m-k+1) = \frac{(n+k)!}{n!} = k! \binom{n+k}{k}.$$

En divisant l'identité par $k! > 0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

La même formule vaut pour $k = 0$ par la série géométrique.

Méthode 2 — Démontrer la somme à partir d'identités binomiales finies.

Cette méthode retrouve la formule sans utiliser l'admission (R) . Pour $r \geq 0$, notons

$$S_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r}{r} x^n$$

lorsque cette somme existe. On a déjà $S_0(x) = 1/(1-x)$.

Supposons $S_{r-1}(x)$ finie pour un entier $r \geq 1$. L'identité de Pascal, sommée sur un nombre fini de termes, donne

$$\binom{n+r}{r} = \sum_{j=0}^n \binom{j+r-1}{r-1}.$$

En effet, elle est vraie pour $n = 0$, et la différence entre les expressions au rang n et au rang $n-1$ est $\binom{n+r-1}{r-1}$.

La somme partielle

$$T_N = \sum_{n=0}^N \binom{n+r}{r} x^n$$

s'écrit donc, en intervertissant seulement deux sommes finies,

$$T_N = \sum_{j=0}^N \binom{j+r-1}{r-1} \sum_{n=j}^N x^n.$$

Tous les termes sont positifs ou nuls. Comme

$$\sum_{n=j}^N x^n \leq x^j / (1-x),$$

$$0 \leq T_N \leq \frac{1}{1-x} \sum_{j=0}^N \binom{j+r-1}{r-1} x^j \leq \frac{S_{r-1}(x)}{1-x}.$$

La suite des sommes partielles est croissante et majorée ; sa limite finie $S_r(x)$ existe. Pour tout entier fixé J et $N \geq J$, on a aussi

$$T_N \geq \sum_{j=0}^J \binom{j+r-1}{r-1} \sum_{n=j}^N x^n.$$

On fait tendre N vers l'infini dans cette dernière somme finie, puis J vers l'infini :

$$S_r(x) \geq \frac{1}{1-x} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+r-1}{r-1} x^j = \frac{S_{r-1}(x)}{1-x}.$$

Avec la majoration précédente, cela prouve $S_r(x) = S_{r-1}(x)/(1-x)$. Par récurrence,

$$S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

La première méthode suit le guidage de l'énoncé. La seconde construit les sommes par récurrence et montre comment des encadrements de sommes partielles évitent tout échange non justifié avec une limite.

2. Application à l'étude de la loi binomiale négative.

Dans cette question, on pose $q = 1 - p \in]0, 1[$.

- a)** La variable X_1 est le rang du premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre p . Elle suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$.

Pour $n \geq 0$, l'événement $[X_1 = n + 1]$ exige n échecs suivis d'un succès. Par indépendance,

$$P(X_1 = n + 1) = q^n p.$$

Cette loi admet une espérance et $E(X_1) = 1/p$, d'après le résultat du cours sur la loi géométrique.

- b)** Le nombre de succès au cours des $n + k - 1$ premières épreuves suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n + k - 1, p)$, puisque les épreuves sont indépendantes et de même probabilité de succès. La probabilité d'y obtenir exactement $k - 1$ succès est

$$\binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1} q^n.$$

Pour que le k -ième succès intervienne à l'épreuve $n + k$, il faut et il suffit qu'il y ait exactement $k - 1$ succès avant cette épreuve et que celle-ci soit un succès. La dernière épreuve est indépendante des précédentes. Ainsi,

$$P(X_k = n + k) = \binom{n+k-1}{k-1} p^k q^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ces probabilités sont strictement positives pour tout $n \geq 0$; les valeurs possibles de X_k sont donc tous les entiers à partir de k .

c) Pour $k \geq 1$, I.1.d, appliquée avec l'entier $k - 1$ et $x = q$, donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_k = n + k) = p^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n + k - 1}{k - 1} q^n = \frac{p^k}{(1 - q)^k} = 1.$$

Le cas $k = 1$ utilise simplement la série géométrique. Cette normalisation montre aussi que le k -ième succès survient presque sûrement après un nombre fini d'épreuves.

Méthode 1 — Calculer l'espérance par la loi.

Les valeurs $n + k$ étant positives, l'existence de l'espérance équivaut à la convergence de la série positive correspondante. Or

$$(n + k) \binom{n + k - 1}{k - 1} = k \binom{n + k}{k}.$$

Par I.1.d, on obtient une somme finie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n + k) P(X_k = n + k) = kp^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n + k}{k} q^n = \frac{kp^k}{(1 - q)^{k+1}} = \frac{k}{p}.$$

L'espérance existe donc et $E(X_k) = k/p$.

Méthode 2 — Décomposer le temps d'attente en temps élémentaires.

Notons $W_1 = X_1$, puis $W_j = X_j - X_{j-1}$ pour $2 \leq j \leq k$. La variable W_j compte les épreuves entre le $(j - 1)$ -ième et le j -ième succès, en incluant la dernière épreuve.

Pour des entiers $r_1, \dots, r_k \geq 1$, l'événement $[W_1 = r_1, \dots, W_k = r_k]$ impose une succession précise : $r_1 - 1$ échecs puis un succès, $r_2 - 1$ échecs puis un succès, et ainsi de suite.

L'indépendance des épreuves donne

$$P(W_1 = r_1, \dots, W_k = r_k) = p^k q^{r_1 + \dots + r_k - k} = \prod_{j=1}^k (pq^{r_j - 1}).$$

En sommant sur les autres indices, les séries géométriques de somme 1 montrent que chaque W_j suit $\mathcal{G}(p)$. La factorisation montre également leur indépendance mutuelle. Les W_j sont intégrables, d'espérance $1/p$, et

$$X_k = W_1 + \dots + W_k.$$

La linéarité de l'espérance donne alors $E(X_k) = k/p$. Le temps moyen nécessaire pour obtenir k succès est ainsi k fois le temps moyen d'attente d'un succès. Le calcul par la loi vérifie la convergence ; la décomposition explique la proportionnalité en k .

Partie II

Les deux modèles de cette partie sont étudiés séparément. Pour toute durée h , le passage d'un effectif à un autre est décrit par les probabilités de transition de ce modèle. Dans une formule des probabilités totales, on ne conditionne que par les états de probabilité strictement positive ; les autres apportent un terme nul.

1. Croissance de la population par les naissances.

Question adaptée au programme actuel : l'effectif initial est un entier $k \geq 1$, et la formulation des transitions évite les conditionnements par des événements de probabilité nulle, notamment à l'instant initial.

Précision préalable demandée. À partir de l'état $n + k$, les quatre possibilités « moins de $n + k$ », « exactement $n + k$ », « exactement $n + k + 1$ » et « plus de $n + k + 1$ » forment une partition des effectifs. La première a une probabilité nulle. La probabilité de rester dans le même état vaut donc

$$1 - \lambda(n + k)h - h\varepsilon'_n(h) - h\varepsilon''_n(h) = 1 - \lambda(n + k)h + h\eta_n(h),$$

où $\eta_n = -\varepsilon'_n - \varepsilon''_n$ tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0^+$. Aucun signe n'est imposé à η_n ; les probabilités de transition, elles, restent comprises entre 0 et 1.

- a)** Comme $X(0) = k$ et que la population ne diminue pas, $X(t)$ prend ses valeurs dans $\{k, k+1, \dots\}$. Pour être à l'état k au temps $t+h$, il faut être à l'état k au temps t puis y rester : un état strictement supérieur ne peut redescendre à k .

La formule des probabilités totales donne alors

$$p_k(t+h) = [1 - \lambda kh + h\eta_0(h)]p_k(t) = (1 - \lambda kh)p_k(t) + h\varepsilon_0(h),$$

avec $\varepsilon_0(h) = \eta_0(h)p_k(t) \rightarrow 0$ pour t fixé, car $0 \leq p_k(t) \leq 1$.

Pour $h > 0$, on soustrait $p_k(t)$ et on divise par h :

$$\frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} = -\lambda kp_k(t) + \varepsilon_0(h).$$

Le membre de droite tend vers $-\lambda kp_k(t)$. La dérivée à droite existe donc en tout $t \geq 0$ et vaut $-\lambda kp_k(t)$.

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'énoncé : p_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et son équation est $p'_k = -\lambda kp_k$. Cette admission permet la résolution différentielle de b) ; en 0, la dérivée à droite suffit.

- b)** Pour $t > 0$, la règle de dérivation d'un produit et a) donnent

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda kt} p_k(t)) = e^{\lambda kt} (\lambda kp_k(t) + p'_k(t)) = 0.$$

La fonction est donc constante sur $]0, +\infty[$. La dérivabilité à droite en 0 établie en a) entraîne la continuité à droite en 0, ce qui permet d'identifier cette constante à $p_k(0) = 1$. On obtient

$$p_k(t) = e^{-\lambda kt} \quad (t \geq 0).$$

Il s'agit de la probabilité qu'aucune naissance n'ait encore eu lieu ; la formule vaut 1 en 0 et tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

c) Fixons $n \geq 1$ et $t \geq 0$. Pour atteindre l'effectif $n + k$ au temps $t + h$, on distingue les états au temps t .

- Depuis $n + k$, il faut rester dans cet état, de probabilité $1 - \lambda(n + k)h + h\eta_n(h)$.
- Depuis $n + k - 1$, il faut exactement une naissance, de probabilité $\lambda(n + k - 1)h + h\varepsilon'_{n-1}(h)$.
- Depuis $j + k$, avec $0 \leq j \leq n - 2$, il faut au moins deux naissances ; la probabilité d'arriver exactement à $n + k$ est comprise entre 0 et $h\varepsilon''_j(h)$.
- Depuis un état supérieur à $n + k$, le passage est impossible.

La troisième catégorie comporte un nombre fini d'états. En notant $R_n(t, h)$ sa contribution totale, on a, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq R_n(t, h) \leq h \sum_{j=0}^{n-2} \varepsilon''_j(h) p_{j+k}(t) \leq h \sum_{j=0}^{n-2} \varepsilon''_j(h).$$

Le quotient $R_n(t, h)/h$ tend donc vers 0. Pour $n = 1$, cette contribution est vide et nulle. Les probabilités totales donnent ainsi

$$p_{n+k}(t + h) = [1 - \lambda(n + k)h]p_{n+k}(t) + \lambda(n + k - 1)hp_{n+k-1}(t) + h\varepsilon_n(h),$$

où l'on peut poser, pour t fixé,

$$\varepsilon_n(h) = \eta_n(h)p_{n+k}(t) + \varepsilon'_{n-1}(h)p_{n+k-1}(t) + R_n(t, h)/h.$$

Chacun des trois termes tend vers 0. On soustrait $p_{n+k}(t)$, puis on divise par h et on fait tendre $h \rightarrow 0^+$:

$$p'_{n+k}(t) = -\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t).$$

La dérivée à droite existe donc. Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'énoncé : cette relation vaut pour la dérivée sur $]0, +\infty[$. Elle donne l'équation différentielle utilisée en d), avec $p_{n+k}(0) = 0$ pour $n \geq 1$.

d) On résout successivement les équations de c) en suivant le facteur indiqué. Posons

$$v_n(t) = e^{\lambda(n+k)t} p_{n+k}(t).$$

Pour $t > 0$,

$$v'_n(t) = e^{\lambda(n+k)t} (\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + p'_{n+k}(t)) = \lambda(n+k-1)e^{\lambda(n+k)t} p_{n+k-1}(t).$$

La fonction v_n est continue à droite en 0, et $v_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$.

Initialisation. Pour $n = 0$, b) donne $p_k(t) = e^{-\lambda kt}$, qui est la formule voulue avec $\binom{k-1}{k-1} = 1$.

Hérédité. Pour $n \geq 1$, supposons la formule vraie au rang $n-1$:

$$p_{n+k-1}(t) = \binom{n+k-2}{k-1} e^{-\lambda kt} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

En la reportant dans la dérivée de v_n ,

$$v'_n(t) = \lambda(n+k-1) \binom{n+k-2}{k-1} e^{\lambda nt} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Or $e^{\lambda nt} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{n-1}$ et

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} - 1)^n = n\lambda e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{n-1}.$$

De plus, par les factorielles,

$$\frac{n+k-1}{n} \binom{n+k-2}{k-1} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

On en déduit

$$v'_n(t) = \binom{n+k-1}{k-1} \frac{d}{dt} (e^{\lambda t} - 1)^n.$$

Les deux fonctions ont la même dérivée et s'annulent en 0, d'où

$$v_n(t) = \binom{n+k-1}{k-1} (e^{\lambda t} - 1)^n.$$

En multipliant par $e^{-\lambda(n+k)t}$ et en réécrivant $e^{\lambda t} - 1 = e^{\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$, on obtient

$$p_{n+k}(t) = \binom{n+k-1}{k-1} e^{-\lambda k t} (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

L'hérédité est démontrée. La formule vaut pour tous $n \geq 0$ et $t \geq 0$; pour $n = 0$, le facteur à la puissance 0 est le terme constant 1.

e) Pour $t > 0$, posons $p = e^{-\lambda t} \in]0, 1[$. La formule précédente s'écrit

$$P(X(t) = n + k) = \binom{n+k-1}{k-1} p^k (1 - p)^n \quad (n \geq 0).$$

Il s'agit exactement de la loi binomiale négative de paramètres $p = e^{-\lambda t}$ et k , définie et étudiée en I.2. Cette reconnaissance ne suppose aucun résultat supplémentaire sur cette famille : la normalisation et l'existence de l'espérance ont été établies en I.2.c. Par ce résultat,

$$E(X(t)) = \frac{k}{e^{-\lambda t}} = k e^{\lambda t}.$$

À l'instant $t = 0$, $X(0) = k$ est certaine. Son espérance est k , ce qui est cohérent avec la même formule, mais ce cas ne relève pas de la définition donnée en I.2, où $0 < p < 1$. La population moyenne croît exponentiellement.

2. Croissance de la population par l'immigration.

Question adaptée au programme actuel : on conserve tous les effectifs initiaux $k \in \mathbb{N}$ autorisés au début de la partie II ; les transitions sont interprétées selon la même convention que pour les naissances.

Précision préalable demandée. Les probabilités de toutes les issues possibles à partir de l'état $n + k$ ont pour somme 1. La probabilité de rester dans cet état est donc

$$1 - \mu h - h\varepsilon'_n(h) - h\varepsilon''_n(h) = 1 - \mu h + h\eta_n(h),$$

avec $\eta_n = -\varepsilon'_n - \varepsilon''_n \rightarrow 0$. Ici, contrairement au modèle de naissances, le terme principal ne dépend pas de l'effectif présent.

- a) L'effectif ne peut pas diminuer et ne peut pas être inférieur à k . Seul un maintien dans l'état k contribue à la probabilité d'y être encore à l'instant $t + h$. Les probabilités totales donnent

$$q_k(t + h) = [1 - \mu h + h\eta_0(h)]q_k(t) = (1 - \mu h)q_k(t) + h\varepsilon_0(h),$$

où $\varepsilon_0(h) = \eta_0(h)q_k(t) \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\frac{q_k(t + h) - q_k(t)}{h} = -\mu q_k(t) + \varepsilon_0(h) \rightarrow -\mu q_k(t).$$

La dérivée à droite existe et vaut $q'_k(t) = -\mu q_k(t)$. Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'énoncé : cette formule vaut pour la dérivée sur $]0, +\infty[$. Elle permettra de résoudre b). Le résultat est valable également si $k = 0$.

- b) Pour $t > 0$,

$$\frac{d}{dt} (e^{\mu t} q_k(t)) = e^{\mu t} (\mu q_k(t) + q'_k(t)) = 0.$$

Cette fonction est constante sur $]0, +\infty[$. Par la continuité à droite en 0 résultant de a), et comme $q_k(0) = 1$, sa constante vaut 1. On a donc

$$q_k(t) = e^{-\mu t} \quad (t \geq 0).$$

Il s'agit de la probabilité de n'avoir encore reçu aucun immigré ; elle est indépendante de k .

- c) Fixons $n \geq 1$. Les seuls passages apportant un terme d'ordre h à l'effectif $n + k$ proviennent de l'état $n + k$ sans arrivée et de l'état $n + k - 1$ avec une arrivée. Les états $j + k$, pour $0 \leq j \leq n - 2$, ne peuvent atteindre $n + k$ qu'avec plusieurs arrivées.

Notons $R_n(t, h)$ la contribution de ces derniers états. Elle est nulle si $n = 1$, et, si $n \geq 2$,

$$0 \leq R_n(t, h) \leq h \sum_{j=0}^{n-2} \varepsilon_j''(h) q_{j+k}(t) \leq h \sum_{j=0}^{n-2} \varepsilon_j''(h).$$

Le quotient par h tend vers 0, car la somme est finie. Les états supérieurs à $n + k$ ne peuvent pas contribuer. En appliquant les probabilités totales,

$$q_{n+k}(t+h) = [1 - \mu h + h\eta_n(h)]q_{n+k}(t) + [\mu h + h\varepsilon'_{n-1}(h)]q_{n+k-1}(t) + R_n(t, h).$$

Les deux termes contenant η_n et ε'_{n-1} , ainsi que $R_n(t, h)$, se regroupent en $h\varepsilon_n(h)$ avec $\varepsilon_n(h) \rightarrow 0$. Cela donne l'identité demandée :

$$q_{n+k}(t+h) = (1 - \mu h)q_{n+k}(t) + \mu h q_{n+k-1}(t) + h\varepsilon_n(h).$$

Après soustraction de $q_{n+k}(t)$, division par $h > 0$ et passage à la limite,

$$q'_{n+k}(t) = -\mu q_{n+k}(t) + \mu q_{n+k-1}(t).$$

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'énoncé : cette équation vaut pour la dérivée sur $]0, +\infty[$, la dérivée à droite étant utilisée en 0. Elle sera résolue en d).

La ligne $k \geq 1$ du PDF n'est pas nécessaire ici : le raisonnement reste valable pour $k = 0$, sans aucun indice négatif puisque $n \geq 1$. La version adaptée rétablit donc $k \in \mathbb{N}$.

d) Pour $n \geq 0$, posons $v_n(t) = e^{\mu t} q_{n+k}(t)$. La question b) donne $v_0(t) = 1$. Pour $n \geq 1$, la règle du produit et c) donnent

$$v'_n(t) = e^{\mu t} (\mu q_{n+k}(t) + q'_{n+k}(t)) = \mu e^{\mu t} q_{n+k-1}(t) = \mu v_{n-1}(t).$$

L'effectif initial étant k , $v_n(0) = q_{n+k}(0) = 0$ pour $n \geq 1$. Les fonctions sont continues à droite en 0, ce qui fixe les constantes des primitives calculées sur $]0, +\infty[$.

Pour $n = 1$, $v'_1 = \mu v_0 = \mu$ et $v_1(0) = 0$, donc $v_1(t) = \mu t$ et

$$q_{k+1}(t) = \mu t e^{-\mu t}.$$

Pour $n = 2$, $v'_2 = \mu v_1 = \mu^2 t$ et $v_2(0) = 0$, donc $v_2(t) = \mu^2 t^2 / 2$ et

$$q_{k+2}(t) = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t}.$$

Pour $n = 3$, $v'_3 = \mu v_2 = \mu^3 t^2 / 2$ et $v_3(0) = 0$, donc $v_3(t) = \mu^3 t^3 / 6$ et

$$q_{k+3}(t) = \frac{(\mu t)^3}{6} e^{-\mu t}.$$

On généralise par récurrence. Si $v_{n-1}(t) = (\mu t)^{n-1} / (n-1)!$, alors

$$v'_n(t) = \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu^n t^n}{n!} \right).$$

La condition $v_n(0) = 0$ donne $v_n(t) = (\mu t)^n / n!$. Avec $v_0 = 1$, on conclut, pour tout $n \geq 0$,

$$q_{n+k}(t) = P(X(t) = n + k) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}.$$

e) Pour $t > 0$, on a $\mu t > 0$ et

$$P(X(t) - k = n) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} \quad (n \geq 0).$$

La variable $X(t) - k$ suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu t)$, dont l'espérance existe et vaut μt .
Par linéarité,

$$E(X(t)) = k + \mu t.$$

À $t = 0$, la variable $X(0) - k$ est certaine égale à 0; $E(X(0)) = k$, en accord avec cette expression. La population moyenne croît ici linéairement, avec un accroissement moyen μ par unité de temps, indépendamment de l'effectif initial.

Relevé des adaptations

- I.1.b–d : l'admission de la dérivation terme à terme est formulée comme l'identité particulière (R) pour la seule fonction $1/(1-x)$; aucune règle générale de dérivation de séries n'est supposée. Les calculs demandés sont conservés. Une seconde preuve élémentaire de la somme binomiale, par encadrements de sommes partielles, est donnée en I.1.d.

- Préambule de II, II.1 et II.2 : précision que k est entier et formulation des probabilités comme transitions à partir d'un état; les conditionnelles ne sont utilisées que lorsque l'état a une probabilité strictement positive. Cela permet de conserver le modèle et les calculs même à $t = 0$, où plusieurs états ont une probabilité nulle.
- II.1.a et II.1.c, II.2.a et II.2.c : précision que les restes dans les identités de probabilités totales sont considérés pour t fixé, et que la dérivée à l'origine est celle à droite; les admissions particulières de dérivabilité déjà présentes sont conservées.
- II.2.c : la restriction $k \geq 1$ de cette ligne du PDF est remplacée par $k \in \mathbb{N}$, conformément au préambule et au modèle d'immigration; le cas d'une population initialement vide reste ainsi traité.