



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques III — Option économique

1998

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie, pour tout réel x , par

$$f(x) = \exp(a(x - 1)).$$

On définit une suite (u_k) par $u_0 = 0$ et $u_{k+1} = f(u_k)$.

1. Convergence de la suite (u_k) .

a) Établir par récurrence, pour tout entier naturel k , les inégalités

$$0 \leq u_k \leq 1 \quad \text{et} \quad u_k \leq u_{k+1}.$$

b) En déduire la convergence de la suite (u_k) , dont on notera $L(a)$ la limite.

2. Limite de la suite (u_k) lorsque $a < 1$.

a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que

$$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).$$

b) En déduire l'inégalité $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$ pour tout entier naturel k , puis la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $0 < a < 1$.

3. Limite de la suite (u_k) lorsque $a \geq 1$.

a) On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.

- Prouver que $0 \leq 1 - \ln(a)/a \leq 1$ pour $a \geq 1$.
- Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a .

- En déduire les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$. Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.

On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$. On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$ et que $r(1) = 1$.

b) On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.

- Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto xe^{-x}$. Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.
- En déduire que la fonction Φ , définie pour $0 \leq x \leq 1$ par $\Phi(x) = xe^{-x}$, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1/e]$, et montrer que la fonction Φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0, 1/e]$, en citant le théorème utilisé. Dresser le tableau de variation de Φ^{-1} .
- Prouver que $r(a) = \frac{1}{a}\Phi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

c) On étudie maintenant la limite de la suite (u_k) lorsque $a \geq 1$.

- Établir l'inégalité $0 \leq u_k \leq r(a)$ pour tout entier naturel k .
- En déduire la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $a \geq 1$.
- Écrire en Python un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) \simeq 0,20$, $L(4) \simeq 0,02$, etc. On pourra utiliser une dichotomie sur $[0, 1/a]$ lorsque $a > 1$. La commande `np.exp(x)`, après `import numpy as np`, calcule l'exponentielle de x .

4. Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Partie II

Dans cette partie, le temps est discrétisé et se présente comme une succession d'instants $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. On considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle $[n - 1, n[$, c'est-à-dire entre deux instants consécutifs $n - 1$ et n , avec $n \geq 1$.

On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par B_n la variable aléatoire égale à 1 si un client se présente entre les instants $n - 1$ et n , et à 0 sinon. Le client ainsi arrivé se place au bout de la file d'attente. Les variables $B_1, B_2, \dots$ sont indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p , où $0 < p < 1$.

On appelle durée de service d'un client le temps passé par l'employé à le servir, une fois son attente achevée. Si le service du premier client dure n instants, le guichet est libre pour le suivant à partir de l'instant n .

Les durées de service des clients successifs sont indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. La famille des durées de service est indépendante de la famille des variables B_n . On note D la durée du service du client initial.

On étudie la période d'occupation commencée avec le client initial : elle s'achève dès que le guichet et sa file sont vides. Les éventuelles arrivées après cette fin ne sont pas incluses dans cette période.

On appelle première vague l'ensemble des clients arrivés pendant le service du client initial, puis, plus généralement, $(k + 1)$ -ième vague l'ensemble des clients arrivés pendant le service des clients de la k -ième vague. On désigne par N_k le nombre de clients de la k -ième vague, en posant $N_k = 0$ si cette vague est vide. Par convention, $N_0 = 1$.

1. Loi de la variable aléatoire N_1 .

- a) Étant donné un entier naturel n , déterminer la loi de N_1 conditionnée par $D = n$. Préciser les probabilités $P(N_1 = k \mid D = n)$.
- b) En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

2. Probabilité pour que la file d'attente s'achève.

Dans toute la suite, on pose $p_k = P(N_k = 0)$.

- a) Prouver que l'événement « la file d'attente s'achève au bout d'un temps fini », c'est-à-dire « il n'y a plus personne au guichet au bout d'un temps fini pendant la période étudiée », est la réunion des événements $[N_k = 0]$ pour $k \geq 1$.

Montrer que la suite d'événements $([N_k = 0])_{k \geq 1}$ est croissante, et en déduire :

- que la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ converge vers une limite $L \leq 1$;
- que la probabilité pour que la file s'achève au bout d'un temps fini est égale à L .

- b) Justifier, pour tous entiers naturels j, k , les formules

$$P(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = 1) = P(N_k = 0), \quad P(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = (P(N_k = 0))^j.$$

Dans cette formule, on convient que $z^0 = 1$ pour tout $z \in [0, 1]$, y compris lorsque $z = 0$.

- c) En déduire l'expression de p_{k+1} en fonction de p_k , préciser p_0 et, à l'aide de la partie I, la limite de la suite (p_k) et la probabilité pour que la file s'achève au bout d'un temps fini. Discuter et interpréter le résultat en fonction des valeurs de λp .
- d) Déterminer les valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service vaut 1, 2, 4 ou 8 instants, et que la probabilité d'arrivée entre deux instants consécutifs vaut d'abord 0,5, puis 0,25.

3. Calcul de l'espérance $E(N_k)$.

Pour un entier $k \geq 0$, on pose $I_k = \{i \in \mathbb{N} \mid P(N_k = i) > 0\}$. Pour $i \in I_k$, on appelle « espérance de N_{k+1} conditionnée par $N_k = i$ », et on note $E(N_{k+1} \mid N_k = i)$, l'espérance sous cette probabilité conditionnelle, si elle existe :

$$E(N_{k+1} \mid N_k = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j \mid N_k = i). \quad (*)$$

- a) On suppose $N_k = i$ réalisé, avec $i \in I_k$. Déterminer la loi de la durée totale de service de ces i clients en distinguant $i = 0$ et $i \geq 1$. En déduire la loi de N_{k+1} conditionnée par $N_k = i$ et vérifier que

$$E(N_{k+1} \mid N_k = i) = i\lambda p.$$

- b) On suppose que $E(N_k)$ existe. Établir que

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i \in I_k} P(N_k = i) E(N_{k+1} \mid N_k = i).$$

En admettant qu'il est alors licite de permuter les symboles sommes dans le calcul, établir l'existence de $E(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ , p et $E(N_k)$.

- c) En déduire l'existence et l'expression de $E(N_k)$.
- d) Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la n -ième vague incluse.
- e) Discuter et interpréter la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$ pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas évoqués en II.2.d ?