



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques III — Option économique

1998

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. a) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car $f'(x) = a \exp(a(x-1)) > 0$. Elle est positive et $f(1) = 1$, donc elle envoie $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Pour $k = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = e^{-a} \in]0, 1[$: les inégalités demandées sont vérifiées.

Supposons $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$. En appliquant la fonction croissante f , on obtient

$$0 < f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1) = 1,$$

c'est-à-dire $0 < u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$. La récurrence est établie. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_k \leq 1, \quad u_k \leq u_{k+1}.$$

- b) La suite (u_k) est croissante et majorée par 1. Le théorème de convergence des suites monotones assure qu'elle converge vers un réel $L(a) \in [0, 1]$.

La fonction f étant continue, le passage à la limite dans $u_{k+1} = f(u_k)$ donne aussi

$$L(a) = \exp(a(L(a) - 1)).$$

Cette équation ne suffit pas, à elle seule, à choisir une limite lorsqu'elle a plusieurs racines ; les questions suivantes préciseront celle qui est atteinte.

2. a) On suppose $0 < a < 1$. Sur $[0, 1]$, la dérivée vérifie $0 < f'(x) \leq a$. L'inégalité des accroissements finis, appliquée aux deux points u_k et 1 de cet intervalle, donne

$$|f(1) - f(u_k)| \leq a|1 - u_k|.$$

Les quantités $1 - u_k$ et $1 - u_{k+1}$ sont positives ou nulles d'après I.1.a. Avec $f(1) = 1$ et $f(u_k) = u_{k+1}$, il vient

$$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).$$

- b) Pour $k = 0$, on a $1 - u_0 = 1 = a^0$. En appliquant successivement l'inégalité précédente, une récurrence donne

$$0 \leq 1 - u_k \leq a^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Comme $0 < a < 1$, la suite géométrique (a^k) tend vers 0. Par encadrement, $1 - u_k$ tend vers 0, donc

$$L(a) = 1 \quad \text{pour } 0 < a < 1.$$

3. a) Posons $h_a(x) = f(x) - x$ et $c_a = 1 - \ln(a)/a$.

Pour $a \geq 1$, on a $\ln a \geq 0$. De plus, la fonction $a \mapsto a - 1 - \ln a$ est nulle en 1 et a pour dérivée $1 - 1/a \geq 0$ sur $[1, +\infty[$. Ainsi $\ln a \leq a - 1 < a$, d'où

$$0 < c_a \leq 1.$$

Cela établit, en particulier, les inégalités demandées $0 \leq c_a \leq 1$; si $a > 1$, alors $c_a < 1$.

L'équation $f'(x) = 1$ s'écrit $ae^{a(x-1)} = 1$. L'exponentielle étant bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, elle possède l'unique solution

$$x = c_a = 1 - \frac{\ln a}{a}.$$

Méthode 1 — Étudier directement la différence $f(x) - x$.

On a $h'_a(x) = ae^{a(x-1)} - 1$. Cette dérivée est négative pour $x < c_a$, nulle en c_a , positive pour $x > c_a$. La fonction h_a décroît strictement sur $] -\infty, c_a]$ et croît strictement sur $[c_a, +\infty[$. Enfin,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_a(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = +\infty,$$

la seconde limite provenant de la croissance comparée de l'exponentielle et de x .

Si $a = 1$, on a $c_a = 1$ et $h_1(1) = 0$. Son minimum est donc nul et atteint uniquement en 1 : l'équation $f(x) = x$ possède exactement une racine, $r(1) = 1$.

Si $a > 1$, alors $c_a < 1$ et $h_a(1) = 0$. La croissance stricte sur $[c_a, +\infty[$ entraîne $h_a(c_a) < 0$. Comme $h_a(0) = e^{-a} > 0$, le théorème de la bijection appliqué à h_a sur $[0, c_a]$ donne une unique racine $r(a) \in]0, c_a[$. Sur $[c_a, +\infty[$, l'unique racine est 1. Il n'y en a aucune autre, par les variations établies. Ainsi l'équation possède exactement deux racines et

$$0 < r(a) < 1 \quad (a > 1).$$

Méthode 2 — Vérifier les racines en prenant le logarithme.

Toute racine est strictement positive, puisque f l'est. Pour $x > 0$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à

$$q_a(x) = \ln x - a(x - 1) = 0.$$

La dérivée $q'_a(x) = 1/x - a$ est positive sur $]0, 1/a[$ et négative sur $]1/a, +\infty[$. Les limites de q_a en 0^+ et en $+\infty$ sont toutes deux $-\infty$. Son maximum vaut

$$q_a(1/a) = a - 1 - \ln a.$$

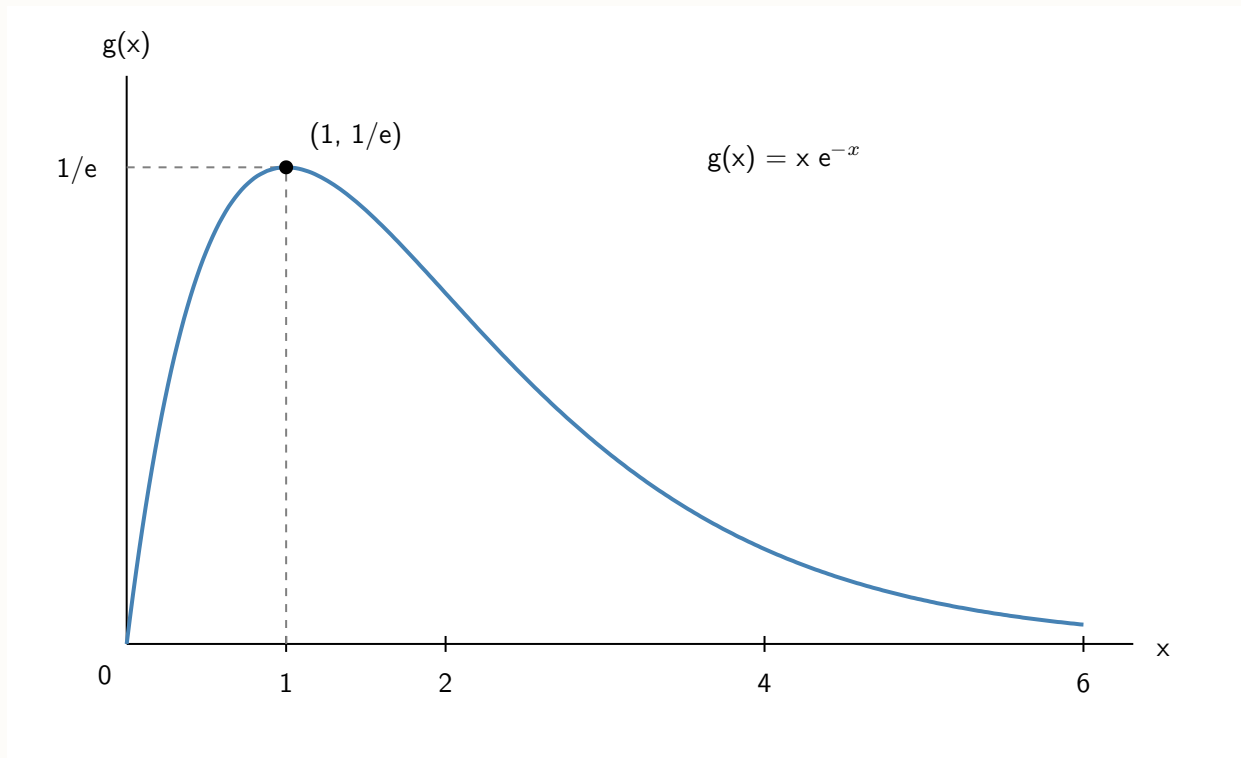
Il est nul si $a = 1$, strictement positif si $a > 1$, par l'étude précédente de $a - 1 - \ln a$.

Dans le premier cas, la seule racine est 1. Dans le second, il existe une racine dans $]0, 1/a[$ et une autre dans $]1/a, +\infty[$; celle-ci est 1, puisque $q_a(1) = 0$. On retrouve les deux racines et l'encadrement utile

$$0 < r(a) < \frac{1}{a} < 1 \quad (a > 1).$$

La première méthode répond directement à l'étude de $f - x$ demandée; le logarithme donne un intervalle plus court pour calculer la petite racine.

- b)** Notons $g(x) = xe^{-x}$ pour $x \geq 0$. On a $g'(x) = e^{-x}(1 - x)$: g croît strictement de 0 à $1/e$ sur $[0, 1]$, puis décroît strictement de $1/e$ à 0 sur $[1, +\infty[$. La limite en $+\infty$ est obtenue par croissance comparée. La courbe a son maximum au point $(1, 1/e)$ et admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$.



L'équation $r(a) = e^{a(r(a)-1)}$ implique, en multipliant par $ae^{-ar(a)}$,

$$ar(a)e^{-ar(a)} = ae^{-a},$$

soit $g(ar(a)) = g(a)$.

Si $a = 1$, les deux arguments valent 1. Si $a > 1$, on sait que $ar(a) < a$. On ne peut avoir $ar(a) \geq 1$: la stricte décroissance de g sur $[1, +\infty[$ donnerait alors $g(ar(a)) > g(a)$, en contradiction avec leur égalité. Par conséquent $0 < ar(a) < 1$ pour $a > 1$.

La restriction Φ de g à $[0, 1]$ est continue et strictement croissante. Le théorème de la bijection et le théorème sur la continuité et le sens de variation de la réciproque donnent une bijection

$$\Phi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1/e],$$

dont la réciproque Φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0, 1/e]$. Son tableau de variation est décrit par

y	0		$1/e$
$\Phi^{-1}(y)$	0	$\nearrow$	1

Comme $ar(a) \in]0, 1]$ pour $a \geq 1$ et $\Phi(ar(a)) = ae^{-a}$, on obtient

$$r(a) = \frac{1}{a} \Phi^{-1}(ae^{-a}) \quad (a \geq 1).$$

En particulier $0 < r(a) \leq 1/a$; le théorème d'encadrement donne

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} r(a) = 0.$$

On peut aussi lire cette limite dans la formule : $ae^{-a} \rightarrow 0$ et, par continuité de la réciproque en 0, $\Phi^{-1}(ae^{-a}) \rightarrow 0$.

c) Pour $a \geq 1$, on sait que $r(a) > 0$ et $f(r(a)) = r(a)$. Au rang initial, $0 = u_0 \leq r(a)$. Si $0 \leq u_k \leq r(a)$, la croissance de f donne

$$0 < u_{k+1} = f(u_k) \leq f(r(a)) = r(a).$$

Par récurrence, $0 \leq u_k \leq r(a)$ pour tout k . La limite $L(a)$ est donc inférieure ou égale à $r(a)$; elle vérifie $f(L(a)) = L(a)$ par I.1.b. Or $r(a)$ est la plus petite racine et $L(a) \geq 0$. On en déduit

$$L(a) = r(a) \quad (a \geq 1).$$

En particulier, le cas critique est bien inclus : $L(1) = 1$.

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. Les deux algorithmes ci-dessous supposent $a > 0$ et renvoient une approximation à 10^{-2} près.

Méthode 1 — Encadrer la racine par dichotomie.

Lorsque $a > 1$, I.3.a donne $r(a) \in]0, 1/a[$. Sur cet intervalle, la fonction $q_a(x) = \ln x - a(x - 1)$ croît jusqu'à sa racine, puis reste positive jusqu'à $1/a$. Comme

$h_a(x) = e^{a(x-1)} - x$ a le signe opposé à $q_a(x)$ pour $x > 0$, elle est positive avant $r(a)$ et négative après, sur $]0, 1/a]$. On utilise h_a dans le code pour éviter un logarithme en 0.

Python

```
import numpy as np

def limite_dichotomie(a):
    if a <= 1:
        return 1.0
    gauche = 0.0
    droite = 1.0 / a
    while droite - gauche > 0.02:
        milieu = (gauche + droite) / 2.0
        if np.exp(a * (milieu - 1.0)) > milieu:
            gauche = milieu
        else:
            droite = milieu
    return (gauche + droite) / 2.0
```

Au départ, la racine appartient à $[gauche, droite]$. Si $h_a(milieu) > 0$, elle est à droite du milieu ; sinon elle est à gauche ou égale au milieu. Chaque tour conserve donc cet encadrement et divise sa largeur par 2. La boucle s'arrête, puisque cette largeur vaut $1/(a2^m)$ après m tours. À la sortie, le milieu de l'intervalle est à une distance au plus 0,01 de la racine. Pour $a \leq 1$, la valeur exacte $L(a) = 1$ est renvoyée.

Méthode 2 — Itérer avec une majoration explicite de l'erreur.

Pour $a > 1$, f envoie $[0, 1/a]$ dans lui-même : elle est croissante et

$$f(1/a) = e^{1-a} < 1/a,$$

car $\ln a < a - 1$. Sur cet intervalle,

$$0 < f'(x) \leq q = ae^{1-a} < 1.$$

La suite part de $u_0 = 0$ et reste donc dans cet intervalle. L'inégalité des accroissements finis, appliquée à u_k et à $r(a)$, donne

$$|u_{k+1} - r(a)| \leq q|u_k - r(a)|,$$

puis $|u_k - r(a)| \leq q^k/a$, puisque $r(a) \leq 1/a$. On conserve cette borne dans la variable erreur.

Python

```
import numpy as np

def limite_iteration(a):
    if a <= 1:
        return 1.0
    q = a * np.exp(1.0 - a)
    u = 0.0
    erreur = 1.0 / a
    while erreur > 0.01:
        u = np.exp(a * (u - 1.0))
        erreur = q * erreur
    return u
```

Après k tours, u vaut u_k et erreur vaut q^k/a . La boucle s'arrête car $0 < q < 1$, et la borne assure l'erreur demandée. Cette méthode utilise directement la suite de l'énoncé. Lorsque a est proche de 1, le coefficient q est proche de 1 et cette borne conduit à beaucoup d'itérations ; la dichotomie reste alors plus efficace.

Les deux codes ont été exécutés. Par exemple, la dichotomie renvoie 0,203125 pour $a = 2$ et 0,0234375 pour $a = 4$, d'où les approximations à deux décimales $L(2) \simeq 0,20$ et $L(4) \simeq 0,02$. Ces calculs approchés ne remplacent pas les preuves de convergence et d'erreur.

4. Les résultats précédents donnent

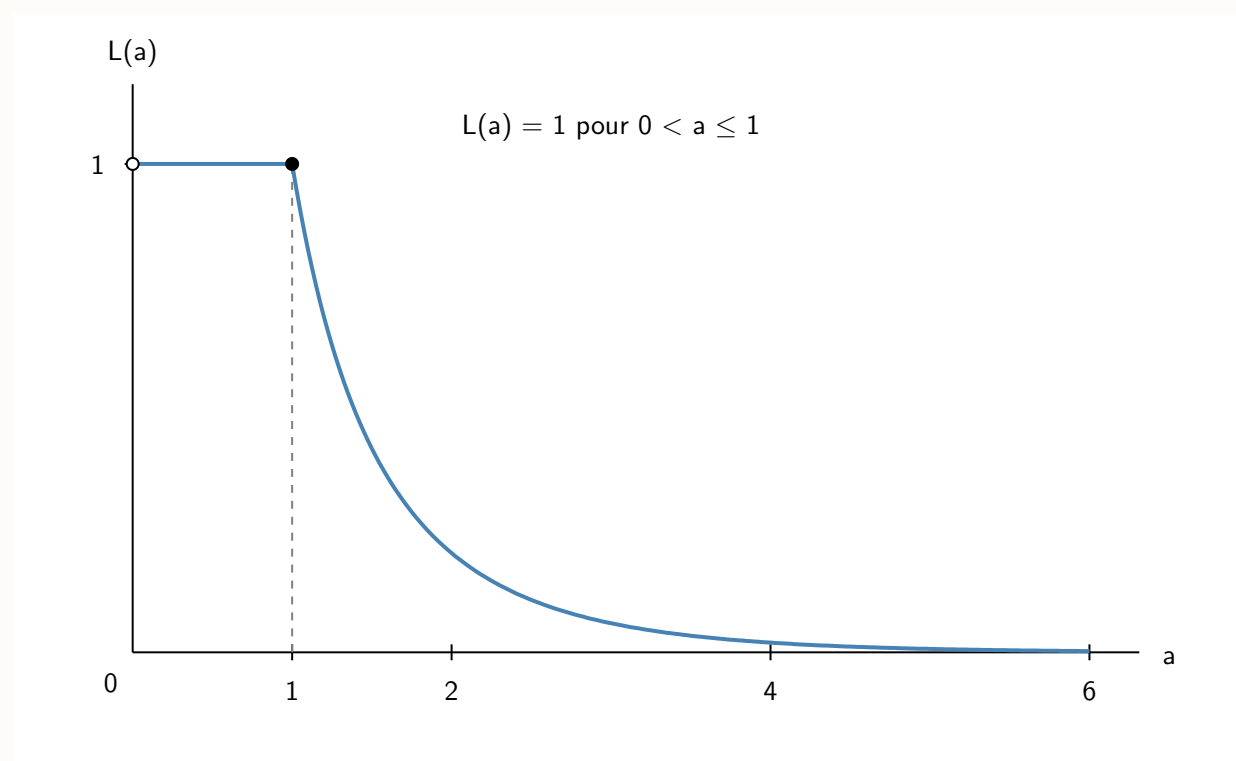
$$L(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < a \leq 1, \\ \frac{1}{a} \Phi^{-1}(ae^{-a}) & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

Pour $a > 1$, la fonction $a \mapsto ae^{-a}$ est strictement décroissante, et Φ^{-1} est strictement croissante; le numérateur $\Phi^{-1}(ae^{-a})$ est donc strictement décroissant et positif. Le facteur $1/a$ est lui aussi strictement décroissant et positif. Ainsi leur produit $L(a)$ est strictement décroissant sur $]1, +\infty[$: si $1 < a < b$, on a successivement

$$\frac{1}{b} \Phi^{-1}(be^{-b}) < \frac{1}{a} \Phi^{-1}(be^{-b}) < \frac{1}{a} \Phi^{-1}(ae^{-a}).$$

La formule assure la continuité sur $]1, +\infty[$. De plus, lorsque $a \rightarrow 1^+$, $ae^{-a} \rightarrow 1/e$ et $\Phi^{-1}(ae^{-a}) \rightarrow 1$, donc $L(a) \rightarrow 1 = L(1)$. La fonction L est donc continue sur $]0, +\infty[$, constante égale à 1 sur $]0, 1]$, puis strictement décroissante vers 0. On a aussi

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} L(a) = 1 \text{ et } L(a) > 0 \text{ pour tout } a > 0.$$



Partie II

1. a) Question adaptée au programme actuel : l'indépendance entre les durées de service et les arrivées est explicitée dans le modèle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(D = n) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$ est strictement positive, donc le conditionnement est défini.

Sachant $D = n$, les arrivées pendant le service sont celles des n intervalles $[0, 1[$, $[1, 2[$, ..., $[n - 1, n[$. L'indépendance avec D conserve les lois de Bernoulli de paramètre p et l'indépendance des variables $B_1, \dots, B_n$. Ainsi

$N_1 \mid [D = n]$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$,

et, pour $0 \leq k \leq n$,

$$P(N_1 = k \mid D = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Ces probabilités sont nulles pour les autres entiers k . Si $n = 0$, il n'y a aucun intervalle de service : $N_1 = 0$ avec probabilité 1 sous ce conditionnement. C'est la loi certaine en 0.

- b) Les événements $[D = n]$, $n \in \mathbb{N}$, forment un système complet. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales donne une série à termes positifs :

$$P(N_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

En posant $m = n - k$ et en simplifiant les factorielles,

$$P(N_1 = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1 - p))^m}{m!}.$$

La série exponentielle a pour somme $e^{\lambda(1-p)}$. Par conséquent,

$$P(N_1 = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

On reconnaît la loi de Poisson de paramètre $a = \lambda p > 0$, et les propriétés de cette loi assurent l'existence de son espérance :

$$N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda p), \quad E(N_1) = \lambda p.$$

Dans la suite, on utilise la notation $a = \lambda p$.

2. a) Question adaptée au programme actuel : la période d'occupation étudiée s'arrête au premier instant où le guichet et la file sont vides. Les arrivées plus tardives ne prolongent pas cette période.

Pour toute issue, chaque durée de service est un entier fini. La première vague est donc finie, et, par récurrence, une vague finie a une durée totale de service finie et ne peut engendrer qu'une vague finie, puisqu'il arrive au plus un client par intervalle de temps.

Si $N_k = 0$, il ne reste plus de client de cette vague à servir et aucune vague suivante ne peut être engendrée : $N_{k+1} = 0$. On a donc $[N_k = 0] \subset [N_{k+1} = 0]$.

Si l'une des vagues est vide, seules un nombre fini de vagues finies ont été servies : leur durée totale est finie, et la période d'occupation s'achève. Réciproquement, si toutes les vagues restent non vides, chaque vague doit engendrer au moins un client de la suivante. Sa durée totale de service est alors au moins 1, car aucun client ne peut arriver pendant une durée nulle. Servir les m premières vagues qui en engendrent une suivante consomme donc au moins m instants. La période ne peut s'achever en temps fini. Cet argument traite aussi les services de durée nulle autorisés par la loi de Poisson.

Ainsi l'événement A « la période d'occupation s'achève en temps fini » vérifie exactement

$$A = \bigcup_{k \geq 1} [N_k = 0].$$

La suite (p_k) est croissante et majorée par 1 ; elle converge donc vers une limite $L \in [0, 1]$. La propriété de continuité de la probabilité pour une union croissante donne

$$P(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(N_k = 0) = L.$$

- b) Justifions d'abord l'indépendance des descendants des différents clients, à partir du modèle, sans supposer de résultat général sur les files d'attente.

Fixons une histoire finie des services et des arrivées, jusqu'à l'instant entier où

commence le service d'un nouveau client. Les variables d'arrivée des intervalles futurs n'ont pas encore été utilisées ; elles restent indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre p , et les durées de service encore inutilisées restent indépendantes, de loi de Poisson de paramètre λ . Cela résulte de l'indépendance des familles du modèle. En conditionnant sur la durée de ce nouveau service, le calcul de II.1 s'applique donc à nouveau : le nombre de clients qu'il engendre suit la loi $\mathcal{P}(a)$, indépendamment de l'histoire fixée. En sommant sur les histoires finies possibles, cette même loi reste valable pour chaque début de service. En répétant ce raisonnement pour un nombre fini de services, les probabilités des nombres de nouveaux clients se factorisent. Les descendants issus de clients distincts utilisent ainsi des tirages indépendants, avec les mêmes lois.

Sachant $N_1 = 1$, la descendance de l'unique client de la première vague est une copie du mécanisme commencé avec le client initial. Le nombre de clients de la vague $k + 1$ est donc distribué comme celui de la vague k du mécanisme initial, d'où

$$P(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = 1) = p_k.$$

Sachant $N_1 = j \geq 1$, on peut distinguer les j familles descendantes des clients de la première vague. La vague $k + 1$ est vide si et seulement si chacune de ces familles est vide à sa génération k . Ces événements sont indépendants, par la factorisation précédente, et chacun a pour probabilité p_k . Ainsi

$$P(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = p_k^j.$$

Pour $j = 0$, toute vague ultérieure est vide ; la probabilité conditionnelle vaut 1, ce qui correspond à la convention $p_k^0 = 1$. Au cas particulier $k = 0$, on a $p_0 = 0$ puisque $N_0 = 1$: la formule donne bien 0 si $j \geq 1$ et 1 si $j = 0$. Tous ces conditionnements sont définis, car la loi $\mathcal{P}(a)$ de N_1 donne une probabilité strictement positive à chaque entier j .

- c) On applique les probabilités totales au système complet $([N_1 = j])_{j \geq 0}$. D'après II.2.b et la série exponentielle,

$$p_{k+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} p_k^j e^{-a} \frac{a^j}{j!} = e^{-a} e^{ap_k} = e^{a(p_k-1)}.$$

Avec $p_0 = P(N_0 = 0) = 0$, on retrouve exactement la suite de la partie I, de paramètre $a = \lambda p$. Sa limite et la probabilité de fin de la période d'occupation sont donc

$$P(A) = L(\lambda p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda p \leq 1, \\ r(\lambda p) & \text{si } \lambda p > 1. \end{cases}$$

Dans le premier cas, la file s'achève presque sûrement en temps fini. Le cas critique $\lambda p = 1$ est inclus. Dans le second, $0 < r(\lambda p) < 1$: il existe une probabilité strictement positive de prolongation indéfinie, égale à $1 - r(\lambda p)$.

Le paramètre λp est le nombre moyen de nouveaux clients engendrés pendant le service d'un client, d'après II.1.b. Cela explique le rôle du seuil 1. Cette interprétation complète la preuve obtenue par la suite récurrente.

- d) La durée moyenne de service est $E(D) = \lambda$. Il suffit donc d'évaluer $L(\lambda p)$ pour les valeurs demandées.

Durée moyenne λ	$p = 0,5$	$p = 0,25$
1	1	1
2	1	1
4	0,20	1
8	0,02	0,20

Les valeurs non égales à 1 viennent de $L(2) \simeq 0,20319$ et $L(4) \simeq 0,01983$, calculées par la dichotomie de I.3.c avec une tolérance plus fine. L'affichage à deux décimales donne une erreur inférieure à 10^{-2} dans chaque cas.

3. a) Question adaptée au programme actuel : on conditionne seulement par les événements $[N_k = i]$ de probabilité strictement positive, c'est-à-dire pour $i \in I_k$. En particulier, $I_0 = \{1\}$; aucun conditionnement par $[N_0 = i]$ avec $i \neq 1$ n'est effectué.

Sachant $N_k = i \geq 1$, les services de ces i clients n'ont pas encore été utilisés pour produire leur descendance. Le raisonnement par histoires finies de II.2.b conserve leur indépendance et leurs lois $\mathcal{P}(\lambda)$. La stabilité de la somme de variables de Poisson indépendantes donne donc, pour leur durée totale S ,

$$S \mid [N_k = i] \sim \mathcal{P}(i\lambda).$$

Si $i = 0$, cette durée totale est égale à 0 avec probabilité 1.

Sachant $N_k = i \geq 1$ puis $S = s$, la vague suivante compte les arrivées dans s intervalles de service : son effectif suit $\mathcal{B}(s, p)$. Le calcul de II.1.b, avec $i\lambda$ à la place de λ , donne

$$N_{k+1} \mid [N_k = i] \sim \mathcal{P}(i\lambda p).$$

Si $i = 0$, la vague suivante est vide : $N_{k+1} = 0$ avec probabilité 1. Dans tous les cas admissibles, l'espérance conditionnée est finie et vaut

$$E(N_{k+1} \mid N_k = i) = i\lambda p = ia.$$

b) Comme N_k est à valeurs entières positives ou nulles et possède une espérance, la série

$$\sum_{i \in I_k} iP(N_k = i)$$

converge et vaut $E(N_k)$. En remplaçant l'espérance conditionnée par ia , on obtient

$$\frac{1}{a} \sum_{i \in I_k} P(N_k = i)E(N_{k+1} \mid N_k = i) = \frac{1}{a} \sum_{i \in I_k} P(N_k = i)ia = E(N_k).$$

On a $a = \lambda p > 0$, donc la division est légitime. En outre, la somme avant division converge et vaut $aE(N_k)$.

Pour établir l'existence de l'espérance suivante, on part de la formule des probabilités

totales et de la définition de l'espérance pour une variable positive ou nulle :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_k} jP(N_{k+1} = j \mid N_k = i)P(N_k = i).$$

Tous les termes sont positifs ou nuls. L'interversion des sommes est admise dans l'énoncé et relève ici des manipulations de sommes doubles discrètes prévues au programme. Elle donne

$$\sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j) = \sum_{i \in I_k} P(N_k = i) \sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j \mid N_k = i) = aE(N_k) < +\infty.$$

La série définissant l'espérance converge donc. Ainsi $E(N_{k+1})$ existe et

$$E(N_{k+1}) = \lambda p E(N_k).$$

Cette identité a été obtenue en développant les probabilités discrètes ; aucune formule générale d'espérance conditionnelle n'est supposée connue.

- c) La variable N_0 est constante égale à 1, donc $E(N_0) = 1$. La question précédente prouve par récurrence l'existence de chaque espérance et la relation géométrique

$$E(N_k) = a^k = (\lambda p)^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

- d) En incluant le client initial, le nombre de clients jusqu'à la vague n est

$$T_n = N_0 + N_1 + \cdots + N_n.$$

Chaque terme possède une espérance par II.3.c. La linéarité de l'espérance pour cette somme finie ne nécessite pas l'indépendance des vagues et donne

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^n a^k = \begin{cases} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} & \text{si } a \neq 1, \\ n + 1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Si l'on ne comptait que les clients arrivés après le client initial, leur espérance serait $E(T_n) - 1$; le total demandé ici inclut bien $N_0 = 1$.

e) Lorsque $0 < a = \lambda p < 1$, la suite géométrique a^{n+1} tend vers 0, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = \frac{1}{1 - \lambda p}.$$

La fin de la période est alors presque sûre d'après II.2.c. La limite ci-dessus est aussi l'espérance du nombre total de clients de cette période : le total se décompose en la somme des effectifs des vagues; le regroupement des sommes de probabilités à termes positifs, comme en II.3.b, donne la somme des espérances

$$\sum_{k \geq 0} a^k.$$

Le nombre moyen de clients autres que le client initial vaut donc $a/(1 - a)$.

Pour compléter les valeurs numériques demandées, si $a = 1$, on a $E(T_n) = n + 1 \rightarrow +\infty$; si $a > 1$, $E(T_n) = (a^{n+1} - 1)/(a - 1) \rightarrow +\infty$. Le tableau des limites est donc

Durée moyenne λ	$p = 0,5$	$p = 0,25$
1	2	4/3
2	$+\infty$	2
4	$+\infty$	$+\infty$
8	$+\infty$	$+\infty$

Au seuil $\lambda p = 1$, l'achèvement de la période reste presque sûr, mais le nombre total de clients n'a pas d'espérance finie. Il n'y a pas de contradiction : une variable finie presque sûrement peut avoir une espérance infinie. Au-delà du seuil, la prolongation indéfinie a de plus une probabilité strictement positive.

Relevé des adaptations

- I.3.c : Code adapté en Python. Ajout d'une indication de dichotomie sur $[0, 1/a]$ pour garantir la précision demandée ; la méthode par itération est également donnée avec une borne d'erreur démontrée. La syntaxe utile de l'exponentielle est documentée.
- Préambule de II, II.1.a, II.2.a–b et II.3.a : précision de l'indépendance entre les durées de service et les arrivées, nécessaire aux lois binomiales conditionnées et à l'indépendance des descendances ; la période étudiée s'arrête lorsque le guichet et sa file sont vides, sans inclure les arrivées ultérieures.
- II.2.b : précision de la convention $z^0 = 1$ pour $z \in [0, 1]$, nécessaire au cas $j = k = 0$.
- II.3, II.3.a–b : définition des espérances conditionnées uniquement pour $i \in I_k$, avec restriction correspondante des sommes. Cela évite les événements de probabilité nulle, notamment lorsque $k = 0$; les calculs demandés et leurs conclusions sont conservés.