



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1996

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie 1

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs ou nuls telle que la série

$$\sum p_n$$

converge.

On considère la fonction $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, appelée fonction génératrice de cette suite, définie par

$$F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k.$$

1. Étude de F .

a) Montrer que, pour $t \in [0, 1]$, la suite de terme général

$$\sum_{k=0}^n p_k t^k$$

est croissante et majorée. En déduire que F est définie sur $[0, 1]$.

b) Montrer que F est une fonction croissante sur $[0, 1]$.

2. Étude locale de F en 1.

a) Montrer que F admet une limite à gauche en 1. On précisera le théorème utilisé.

- Montrer que, pour $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq F(1) - F(t) \leq \sum_{k=0}^n p_k(1 - t^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k.$$

- En déduire que

$$0 \leq F(1) - \lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k.$$

- En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire que F est continue à gauche en 1.

b) Établir que

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k(1 + t + \dots + t^{k-1}).$$

En déduire que la fonction $\varphi : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(t) = \frac{F(t) - F(1)}{t - 1}$, est croissante sur $[0, 1[$.

c) On suppose dans cette question que la série

$$\sum kp_k$$

converge.

Montrer que φ admet une limite à gauche en 1 et que

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k.$$

En déduire que F est dérivable à gauche en 1 et, en notant $F'_g(1)$ le nombre dérivé à gauche de F en 1, que

$$F'_g(1) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k.$$

d) On suppose dans cette question que F est dérivable à gauche en 1.

- Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$,

$$\sum_{k=1}^n p_k(1 + t + \dots + t^{k-1}) \leq \frac{F(t) - F(1)}{t - 1}.$$

- En déduire que

$$\sum_{k=0}^n kp_k \leq F'_g(1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la série

$$\sum kp_k$$

converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kp_k \leq F'_g(1).$$

e) En déduire que F admet une dérivée à gauche en 1 si et seulement si la série

$$\sum kp_k$$

converge, et que

$$F'_g(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k.$$

- f) Application : soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$. Établir qu'une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une espérance est que F admette une dérivée à gauche en 1. Que vaut $E(X)$?

3. Produit de deux fonctions génératrices.

Soient $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs ou nuls telles que les séries

$$\sum p_n$$

et

$$\sum q_n$$

convergent. On définit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

- a) Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^n r_j \leq \left(\sum_{j=0}^n p_j \right) \left(\sum_{j=0}^n q_j \right).$$

En déduire la convergence de la série

$$\sum r_n.$$

b) Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k, \quad G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k t^k, \quad H(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k t^k.$$

- Prouver que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$,

$$\sum_{j=0}^n r_j t^j \leq \left(\sum_{j=0}^n p_j t^j \right) \left(\sum_{j=0}^n q_j t^j \right) \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j.$$

- En déduire que $F(t)G(t) = H(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Partie 2

On considère une pièce dont la probabilité de donner Face est $p \in]0, 1[$. Les lancers successifs sont indépendants.

On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital de K francs, où $K \in \mathbb{N}^*$.

Il lance la pièce :

- si elle donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient $K + 1$ francs ;
- si elle donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient $K - 1$ francs.

À l'issue de ce lancer, si son capital est nul, il est ruiné et le jeu cesse définitivement. Sinon, il recommence, muni de son nouveau capital, la même expérience aléatoire dans les mêmes conditions et poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne par :

- R_K l'événement « le joueur, muni d'un capital initial de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des lancers » ;
- $p_n(K)$ la probabilité que ce joueur soit ruiné pour la première fois à l'issue du n -ième lancer ; par convention, $p_0(K) = 0$;
- F_K la fonction génératrice de la suite $(p_n(K))_{n \in \mathbb{N}}$, définie par

$$\forall t \in [0, 1], \quad F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K) t^n.$$

On vérifiera que $P(R_K) = F_K(1)$.

A. Étude du cas particulier $K = 1$.

On suppose ici que le capital initial du joueur est de 1 franc.

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur.

a) Calculer $p_1(1)$, $p_2(1)$ et $p_3(1)$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, la ruine intervient à l'issue du $(n + 1)$ -ième lancer si et seulement s'il existe un entier j , avec $1 \leq j \leq n - 1$, tel que :

- à l'issue du premier lancer, le capital est de 2 francs ;
- à l'issue des j lancers suivants, le capital revient, pour la première fois depuis le début du jeu, à 1 franc ;

- à l'issue des $n - j$ lancers suivants, le capital arrive pour la première fois à 0 franc et le joueur est ruiné.

Exprimer en fonction de p et des éléments de $(p_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ les probabilités associées aux trois étapes précédentes, puis établir, en rappelant que $p_0(K) = 0$,

$$p \sum_{j=0}^n p_j(1) p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geq 2, \\ 0 & \text{si } n < 2. \end{cases}$$

- c) En multipliant l'égalité précédente par t^{n+1} et en sommant pour $n \geq 0$, établir, à l'aide de la partie 1, question 3, la relation

$$\forall t \in [0, 1], \quad pt(F_1(t))^2 = F_1(t) - (1 - p)t.$$

- d) Étudier les variations de $t \mapsto 1 - 4p(1 - p)t^2$ sur $]0, 1[$ et montrer que

$$\forall t \in]0, 1[, \quad 1 - 4p(1 - p)t^2 > (1 - 2p)^2.$$

En déduire que, pour $t \in]0, 1[$, l'équation $ptx^2 - x + (1 - p)t = 0$ possède deux racines réelles distinctes $x'(t) < x''(t)$.

Montrer que $x''(t) > 1$ pour tout $t \in]0, 1[$, puis, en remarquant que $F_1(t) \leq 1$, en déduire une expression de $F_1(t)$ en fonction de p et de t .

- e) En faisant tendre t vers 1, déterminer $F_1(1)$, puis en déduire $P(R_1)$ en distinguant $p \leq \frac{1}{2}$ et $p > \frac{1}{2}$.

2. Espérance et temps d'attente de la ruine pour $p \leq \frac{1}{2}$.

Pour $p \leq \frac{1}{2}$, déterminer, à l'aide de la partie 1, question 2, l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du lancer à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = \frac{1}{2}$?

B. Étude du cas général.

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur.

- a) Le premier lancer donne Face, respectivement Pile : cet événement est noté ici F_1 , respectivement P_1 . À l'aide du système complet d'événements $\{P_1, F_1\}$, établir que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$p_n(1) = p p_{n-1}(2).$$

En multipliant par t^n et en sommant, établir la relation

$$\forall t \in [0, 1], \quad F_1(t) = ptF_2(t) + (1-p)t,$$

puis en déduire que $F_2(t) = (F_1(t))^2$ pour tout $t \in [0, 1]$.

- b) On suppose $K \geq 2$. En raisonnant de même, établir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(K) = \begin{cases} p p_{n-1}(K+1) + (1-p)p_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de $p, t, F_{K+1}(t)$ et $F_{K-1}(t)$, pour $t \in [0, 1]$.

Pour $t \in [0, 1]$, on définit la suite $(u_K)_{K \in \mathbb{N}^*}$ par $u_K = F_K(t)$. Étudier cette suite et exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K et t .

- c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire $P(R_K)$, en distinguant $p \leq \frac{1}{2}$ et $p > \frac{1}{2}$.

2. Espérance et temps d'attente de la ruine pour $p \leq \frac{1}{2}$.

Pour $p \leq \frac{1}{2}$, déterminer, à l'aide de F_K et des résultats de la partie 1, question 2, l'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du lancer à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = \frac{1}{2}$?