



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1996

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 1

Toutes les suites de coefficients utilisées dans cette partie sont positives ou nulles. Les comparaisons se font d'abord sur des sommes finies, avant passage à la limite.

1. Étude de F .

a) Fixons $t \in [0, 1]$ et posons

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n p_k t^k.$$

Comme $p_k \geq 0$ et $t^k \geq 0$,

$$S_{n+1}(t) - S_n(t) = p_{n+1} t^{n+1} \geq 0.$$

Par ailleurs, $0 \leq t^k \leq 1$, donc

$$0 \leq S_n(t) \leq \sum_{k=0}^n p_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} p_k.$$

Le dernier nombre est fini par hypothèse et ne dépend pas de n . La suite $(S_n(t))$ est croissante et majorée; le théorème de la limite monotone donne sa convergence vers une limite réelle. La série définissant $F(t)$ converge donc pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier, $F(0) = p_0$ et

$$F(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k.$$

b) Soient $0 \leq s \leq t \leq 1$. Pour tout entier $k \geq 0$, $s^k \leq t^k$, puis $p_k s^k \leq p_k t^k$. En additionnant de 0 à n , on obtient $S_n(s) \leq S_n(t)$. Les deux suites convergent d'après 1.a; le passage à la limite conserve l'ordre et donne $F(s) \leq F(t)$. Ainsi, F est croissante sur $[0, 1]$.

2. Étude locale de F en 1.

- a) La fonction F est croissante sur $[0, 1[$ et majorée par le nombre fini $F(1)$. Le théorème de la limite monotone pour les fonctions donne l'existence d'une limite réelle

$$L = \lim_{t \rightarrow 1^-} F(t), \text{ avec } L \leq F(1).$$

Pour $t \in [0, 1]$, les deux séries

$$\sum p_k$$

et

$$\sum p_k t^k$$

convergent. Leur différence s'écrit, par linéarité,

$$F(1) - F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k (1 - t^k).$$

Tous les termes sont positifs ou nuls. Pour un entier n fixé, on sépare la somme initiale du reste et on utilise $0 \leq 1 - t^k \leq 1$:

$$0 \leq F(1) - F(t) = \sum_{k=0}^n p_k (1 - t^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k (1 - t^k) \leq \sum_{k=0}^n p_k (1 - t^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k.$$

On fait d'abord tendre t vers 1^- en gardant n fixé. La première somme est finie et chaque terme tend vers 0 ; il vient

$$0 \leq F(1) - L \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k.$$

Cette inégalité vaut pour tout n . Le reste d'une série convergente tend vers 0, donc, en faisant ensuite tendre n vers $+\infty$, on obtient $F(1) - L = 0$. Ainsi, $\lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) = F(1)$: F est continue à gauche en 1. Aucun échange de limite et de somme infinie n'a été nécessaire.

b) Question adaptée au programme actuel : le domaine de φ est $[0, 1[$, car le quotient qui la définit ne donne aucune valeur en $t = 1$.

Fixons $t \in [0, 1[$. Pour $k \geq 1$, la somme géométrique finie donne

$$1 - t^k = (1 - t)(1 + t + \dots + t^{k-1}).$$

De plus, $0 \leq 1 + t + \dots + t^{k-1} \leq 1/(1 - t)$. La série

$$\sum_{k \geq 1} p_k (1 + t + \dots + t^{k-1})$$

converge donc par comparaison avec

$$\frac{1}{1 - t} \sum_{k \geq 1} p_k.$$

On peut alors passer à la limite dans les identités de sommes finies et obtenir

$$\frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = \frac{F(1) - F(t)}{1 - t} = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k (1 + t + \dots + t^{k-1}).$$

Si $0 \leq s \leq t < 1$, chaque polynôme $1 + t + \dots + t^{k-1}$ a des coefficients positifs et sa valeur en s est inférieure ou égale à sa valeur en t . La comparaison des sommes partielles, puis de leurs limites, donne $\varphi(s) \leq \varphi(t)$. Ainsi, φ est croissante sur $[0, 1[$.

c) Supposons

$$\sum k p_k$$

convergente. Pour $0 \leq t < 1$ et $k \geq 1$, la somme $1 + t + \dots + t^{k-1}$ contient k termes compris entre 0 et 1, donc elle est majorée par k . L'identité de 2.b entraîne

$$0 \leq \varphi(t) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k.$$

La fonction φ est croissante et majorée par une constante finie. Elle admet donc une limite réelle ℓ à gauche de 1, avec

$$0 \leq \ell \leq \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k.$$

Par définition, $\varphi(t)$ est le taux d'accroissement de F entre t et 1. L'existence de cette limite réelle signifie exactement que F est dérivable à gauche en 1, avec

$$F'_g(1) = \ell \leq \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k.$$

d) Question adaptée au programme actuel : après passage à la limite en t , la première inégalité porte sur une somme partielle jusqu'à n . Cela permet de prouver la convergence de la série avant d'en utiliser la somme.

Supposons que $F'_g(1)$ existe comme nombre réel. L'identité de 2.b est une somme de termes positifs ou nuls. Toute somme initiale est inférieure à la somme entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1[, \quad \sum_{k=1}^n p_k(1 + t + \dots + t^{k-1}) \leq \varphi(t).$$

Pour n fixé, on fait tendre t vers 1^- . La somme de gauche est finie ; son terme d'indice k

tend vers kp_k . Le membre de droite tend vers $F'_g(1)$ par hypothèse. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{k=0}^n kp_k \leq F'_g(1).$$

Les sommes partielles de

$$\sum kp_k$$

sont croissantes, car $kp_k \geq 0$, et majorées par le nombre fini $F'_g(1)$. Elles convergent donc.

Le passage à la limite dans leur majoration donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kp_k \leq F'_g(1).$$

e) La question 2.c établit que la convergence de

$$\sum kp_k$$

implique l'existence de $F'_g(1)$, avec

$$F'_g(1) \leq \sum kp_k.$$

La question 2.d donne l'implication réciproque et l'inégalité opposée. Par conséquent,

$$F \text{ est dérivable à gauche en } 1 \iff \sum kp_k \text{ converge,}$$

et, dans ce cas,

$$F'_g(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k.$$

Il s'agit d'une propriété démontrée ici pour ces coefficients positifs, sans règle générale de dérivation de séries.

- f) Pour une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$, les nombres $p_k = P(X = k)$ sont positifs ou nuls et de somme 1. La partie précédente s'applique. Comme $k \geq 0$, la convergence absolue de

$$\sum k P(X = k)$$

équivalait à sa convergence. La définition de l'espérance discrète et 2.e donnent donc

$$X \text{ admet une espérance finie} \iff F \text{ est dérivable à gauche en } 1,$$

et, lorsque ces conditions sont satisfaites,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X = k) = F'_g(1).$$

3. Produit de deux fonctions génératrices.

- a) Pour n fixé, on réécrit une somme finie en posant $\ell = j - k$:

$$\sum_{j=0}^n r_j = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j p_k q_{j-k} = \sum_{\substack{k, \ell \geq 0 \\ k+\ell \leq n}} p_k q_\ell.$$

L'ensemble des couples (k, ℓ) tels que $k + \ell \leq n$ est inclus dans le carré $0 \leq k, \ell \leq n$. Tous les produits sont positifs ou nuls, donc

$$\sum_{j=0}^n r_j \leq \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n p_k q_\ell = \left(\sum_{k=0}^n p_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n q_\ell \right) \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} q_\ell \right).$$

Le dernier produit est fini par hypothèse. La suite des sommes partielles de

$$\sum r_n$$

est donc croissante et majorée : cette série converge.

b) Pour $t \in [0, 1]$, les trois séries sont définies d'après 1.a et 3.a. Le produit des deux sommes finies s'écrit

$$\left(\sum_{k=0}^n p_k t^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n q_\ell t^\ell \right) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} p_k q_\ell t^{k+\ell}.$$

La région d'indices $k + \ell \leq n$ est contenue dans ce carré, lui-même contenu dans la région $k + \ell \leq 2n$. La positivité de tous les termes donne

$$\sum_{j=0}^n r_j t^j \leq \left(\sum_{k=0}^n p_k t^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n q_\ell t^\ell \right) \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j.$$

Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $H(t)$; le membre de droite également, car il s'agit d'une sous-suite de sommes partielles de la même série convergente. Le membre central tend vers $F(t)G(t)$ par la règle de limite d'un produit de suites convergentes. L'encadrement entraîne donc

$$F(t)G(t) = H(t) \quad (t \in [0, 1]).$$

Le résultat découle d'encadrements de sommes finies ; aucune formule de produit de séries n'a été supposée connue.

Partie 2

On pose $q = 1 - p$, de sorte que $0 < q < 1$.

Pour un capital initial K , notons $A_n(K)$ l'événement « première ruine au lancer n ». Les événements $A_n(K)$, pour $n \geq 1$, sont deux à deux disjoints et leur réunion est R_K . Par additivité dénombrable,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(K) = P(R_K) \leq 1.$$

Ainsi, la série de coefficients de F_K converge. D'après la partie 1, F_K est définie sur $[0, 1]$, croissante, continue à gauche en 1, et

$$F_K(0) = 0, \quad F_K(1) = P(R_K), \quad 0 \leq F_K(t) \leq 1.$$

La mention « pour la première fois » dans la définition de $p_n(K)$ est essentielle à cette partition : la partie ne se poursuit pas après la ruine.

A. Étude du cas particulier $K = 1$.

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur.

- a) La ruine au premier lancer se produit si et seulement si la pièce donne Pile, donc $p_1(1) = q$. Pour être ruiné au deuxième lancer, le capital devrait passer de 1 à 0 en deux variations de 1 ou -1 , ce qui est impossible ; plus directement, si le premier lancer n'a pas ruiné le joueur, son capital est 2, puis 1 ou 3. Ainsi, $p_2(1) = 0$.

Pour être ruiné au troisième lancer, il faut successivement Face, Pile, Pile : les capitaux sont 2, puis 1, puis 0. L'indépendance des trois lancers donne

$$p_1(1) = q, \quad p_2(1) = 0, \quad p_3(1) = pq^2.$$

- b) Supposons $n \geq 2$ et une première ruine au lancer $n + 1$. Le premier lancer est nécessairement Face, sinon la ruine aurait eu lieu au premier. Le capital passe donc à 2. Pour atteindre ensuite 0 par pas de 1 ou -1 , il doit d'abord atteindre 1. Notons j le nombre de lancers après le premier nécessaires pour cette première descente de 2 à 1. Il reste au moins un lancer pour descendre de 1 à 0 ; ainsi, $1 \leq j \leq n - 1$.

Réciproquement, la succession des trois étapes décrites dans l'énoncé donne bien une première ruine au lancer $1 + j + (n - j) = n + 1$. L'entier j est unique, car il indique la première visite du capital 1 après le premier lancer.

Pour un entier j fixé, les trois conditions portent sur des blocs disjoints de lancers : le premier lancer, les j suivants et les $n - j$ suivants. Leurs probabilités respectives sont :

- p pour le premier Face ;
- $p_j(1)$ pour la première descente de 2 à 1 en j lancers : soustraire 1 au capital transforme exactement ce bloc en une première ruine à partir du capital 1 ;
- $p_{n-j}(1)$ pour la première descente de 1 à 0 dans les $n - j$ lancers restants.

Les blocs de longueurs fixées sont indépendants, puisque les lancers le sont. La probabilité de leur conjonction est donc $p p_j(1) p_{n-j}(1)$. Les événements obtenus pour des j différents sont disjoints par unicité du premier retour. On en déduit

$$p_{n+1}(1) = p \sum_{j=1}^{n-1} p_j(1) p_{n-j}(1) = p \sum_{j=0}^n p_j(1) p_{n-j}(1),$$

les termes d'indices 0 et n étant nuls. Si $n = 0$ ou $n = 1$, tous les produits de la dernière somme sont nuls, car ils comportent un facteur $p_0(1) = 0$. La formule complète de l'énoncé est donc établie.

c) Posons

$$r_n = \sum_{j=0}^n p_j(1)p_{n-j}(1).$$

La partie 1, question 3, appliquée deux fois à la même suite de coefficients, donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n = (F_1(t))^2 \quad (t \in [0, 1]).$$

La relation de 1.b donne $pr_n = p_{n+1}(1)$ pour $n \geq 2$ et $r_0 = r_1 = 0$. En multipliant par t^{n+1} et en sommant les séries convergentes, on obtient

$$pt(F_1(t))^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n+1}(1)t^{n+1} = \sum_{m=3}^{+\infty} p_m(1)t^m.$$

Or $p_0(1) = p_2(1) = 0$ et $p_1(1) = q$. La dernière somme vaut $F_1(t) - qt$. Finalement,

$$pt(F_1(t))^2 = F_1(t) - qt \quad (t \in [0, 1]).$$

L'identité est aussi valable en $t = 0$, où ses deux membres sont nuls.

d) Question adaptée au programme actuel : l'équation corrigée est $ptx^2 - x + qt = 0$. Le terme constant imprimé dans le PDF est incompatible avec l'identité de 1.c et avec le discriminant annoncé.

On pose $\Delta(t) = 1 - 4pqt^2$. Sa dérivée est $\Delta'(t) = -8pqt < 0$ pour $0 < t < 1$, puisque $pq > 0$. Ainsi, Δ est strictement décroissante sur $]0, 1[$. Pour tout t de cet intervalle,

$$\Delta(t) > \Delta(1) = 1 - 4pq = (1 - 2p)^2 \geq 0.$$

Le coefficient pt du terme de degré 2 est strictement positif. Le trinôme possède donc deux racines réelles distinctes

$$x'(t) = \frac{1 - \sqrt{\Delta(t)}}{2pt}, \quad x''(t) = \frac{1 + \sqrt{\Delta(t)}}{2pt}.$$

Pour montrer que la plus grande dépasse 1, on évalue le trinôme $Q_t(x) = ptx^2 - x + qt$ en 1 :

$$Q_t(1) = pt - 1 + qt = t - 1 < 0.$$

Un trinôme de coefficient dominant strictement positif est négatif entre ses deux racines. Ainsi, $x'(t) < 1 < x''(t)$. D'après 1.c, $F_1(t)$ est une de ces deux racines, tandis que $F_1(t) \leq 1$ d'après le préambule probabiliste. Par conséquent,

$$F_1(t) = x'(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt} \quad (0 < t < 1).$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $1 + \sqrt{1 - 4pqt^2}$, on peut aussi écrire

$$F_1(t) = \frac{2qt}{1 + \sqrt{1 - 4pqt^2}}.$$

Cette seconde expression est également définie en $t = 0$ et y donne $F_1(0) = 0$.

- e) La continuité à gauche de F_1 en 1 a été établie en partie 1 pour toute suite positive sommable ; elle est applicable ici puisque

$$\sum p_n(1) \leq 1.$$

Ainsi,

$$F_1(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} F_1(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2p} = \frac{1 - |1 - 2p|}{2p}.$$

Si $p \leq \frac{1}{2}$, alors $|1 - 2p| = 1 - 2p$ et $F_1(1) = 1$. Si $p > \frac{1}{2}$, alors $|1 - 2p| = 2p - 1$ et $F_1(1) = q/p$. Par le préambule,

$$P(R_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1-p}{p} & \text{si } \frac{1}{2} < p < 1. \end{cases}$$

Le joueur est donc ruiné presque sûrement si la probabilité de gagner un franc ne dépasse pas $1/2$. Si elle dépasse $1/2$, la probabilité de ne jamais être ruiné est

$$1 - q/p = (2p - 1)/p > 0.$$

2. Espérance et temps d'attente de la ruine pour $p \leq \frac{1}{2}$.

Dans ce domaine, la ruine est presque sûre d'après 1.e. Le numéro du lancer de ruine est donc fini presque sûrement et sa loi est $P(X_1 = n) = p_n(1)$ pour $n \geq 1$. Une éventuelle définition arbitraire sur l'événement de non-ruine, de probabilité nulle, ne change pas cette loi.

Supposons d'abord $p < \frac{1}{2}$. Au voisinage de $t = 1$, le nombre $1 - 4pqt^2$ reste strictement positif, car sa valeur en 1 est $(1 - 2p)^2 > 0$. L'expression explicite de F_1 obtenue en 1.d se prolonge donc en une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant 1. On peut calculer sa dérivée en ce point en dérivant son identité $ptF_1(t)^2 = F_1(t) - qt$, identité également satisfaite par cette expression au voisinage de 1 :

$$pF_1(t)^2 + 2ptF_1(t)F_1'(t) = F_1'(t) - q.$$

Avec $F_1(1) = 1$, on obtient

$$(1 - 2p)F_1'(1) = p + q = 1.$$

Le nombre $1 - 2p$ est strictement positif ; ainsi, $F_1'(1) = 1/(1 - 2p)$ est fini. La partie 1, question 2.f, garantit alors l'existence de l'espérance et donne

$$E(X_1) = \frac{1}{1 - 2p} \quad (0 < p < \frac{1}{2}).$$

Pour $p = \frac{1}{2}$, l'expression de 1.d devient

$$F_1(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t} \quad (0 < t < 1), \quad F_1(1) = 1.$$

Son taux d'accroissement à gauche en 1 vaut

$$\frac{F_1(t) - 1}{t - 1} = \frac{1 - t - \sqrt{(1 - t)(1 + t)}}{t(t - 1)} = \frac{1}{t} \left(\sqrt{\frac{1 + t}{1 - t}} - 1 \right).$$

Lorsque $t \rightarrow 1^-$, ce quotient tend vers $+\infty$. La fonction F_1 ne possède donc pas de dérivée à gauche finie en 1. Par 2.f de la partie 1, X_1 n'admet pas d'espérance finie : la

série positive

$$\sum_{n \geq 1} nP(X_1 = n)$$

diverge vers $+\infty$.

Au seuil $p = 1/2$, la ruine arrive presque sûrement en un nombre fini de lancers, mais son temps d'attente moyen est infini. Cette divergence ne signifie pas que la probabilité d'une partie infinie serait positive.

B. Étude du cas général.

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur.

- a) L'événement du premier Face a probabilité p , et celui du premier Pile a probabilité q .
 Pour $n \geq 2$, le premier Pile entraînerait la ruine dès le premier lancer et ne contribue donc pas à une première ruine au lancer n . Après un premier Face, le capital est 2 ; l'indépendance des lancers donne pour la suite du jeu la même loi que celle d'un joueur commençant avec 2 francs. La formule des probabilités totales donne

$$p_n(1) = p p_{n-1}(2) + q \times 0 = p p_{n-1}(2) \quad (n \geq 2).$$

Les coefficients sont sommables. Après multiplication par t^n et sommation pour $n \geq 2$,

$$F_1(t) - qt = \sum_{n=2}^{+\infty} p_n(1)t^n = pt \sum_{m=1}^{+\infty} p_m(2)t^m = ptF_2(t).$$

On a utilisé $p_0(1) = p_0(2) = 0$ et $p_1(1) = q$. En comparant cette égalité avec II.A.1.c,

$$ptF_2(t) = pt(F_1(t))^2.$$

Pour $t \in]0, 1]$, le nombre pt est strictement positif, donc $F_2(t) = (F_1(t))^2$. Pour $t = 0$, les deux membres sont nuls d'après le préambule. Ainsi,

$$F_2(t) = (F_1(t))^2 \quad (t \in [0, 1]).$$

b) Méthode 1 — Résoudre la récurrence en fonction du capital.

Fixons $K \geq 2$. Après le premier lancer, le capital vaut $K + 1$ avec probabilité p , ou $K - 1$ avec probabilité q . Ces deux nombres sont encore strictement positifs. Pour $n \geq 1$, les probabilités totales et l'indépendance des lancers donnent

$$p_n(K) = p p_{n-1}(K + 1) + q p_{n-1}(K - 1).$$

Cette formule donne bien $p_1(K) = 0$, car les deux coefficients d'indice 0 sont nuls : on ne peut être ruiné en un seul lancer avec $K \geq 2$. Avec la convention $p_0(K) = 0$, elle établit toute la relation demandée.

On multiplie ensuite par t^n et on somme pour $n \geq 1$. Par linéarité de séries convergentes et changement d'indice,

$$F_K(t) = p t F_{K+1}(t) + q t F_{K-1}(t) \quad (t \in [0, 1], K \geq 2).$$

Fixons maintenant $0 < t < 1$ et posons $u_K = F_K(t)$. Comme $pt > 0$, la relation s'écrit

$$u_{K+1} - \frac{1}{pt} u_K + \frac{q}{p} u_{K-1} = 0 \quad (K \geq 2).$$

Il s'agit d'une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique réelle est $ptx^2 - x + qt = 0$. D'après II.A.1.d, ses deux racines sont réelles, distinctes, strictement positives ; on les note $r = x'(t) = F_1(t)$ et $s = x''(t) > 1$. Le résultat du cours sur ces récurrences donne des réels A, B tels que

$$u_K = Ar^K + Bs^K \quad (K \geq 1).$$

Les deux valeurs initiales sont $u_1 = r$ et $u_2 = r^2$, d'après 1.a. Elles donnent

$$Ar + Bs = r, \quad Ar^2 + Bs^2 = r^2.$$

En soustrayant r fois la première égalité de la seconde, on obtient $Bs(s - r) = 0$. Comme $s > 0$ et $s \neq r$, il vient $B = 0$. Puis $Ar = r$, et $r > 0$ donne $A = 1$. Par conséquent,

$$F_K(t) = (F_1(t))^K \quad (0 < t < 1).$$

En $t = 0$, cette relation est encore vraie : $F_K(0) = F_1(0) = 0$ et $K \geq 1$. En $t = 1$, on utilise la continuité à gauche de chaque F_K , démontrée en partie 1, et la limite d'une puissance entière :

$$F_K(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} F_K(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 1^-} F_1(t) \right)^K = (F_1(1))^K.$$

On a ainsi traité les deux extrémités sans diviser par $t = 0$ ni supposer deux racines distinctes lorsque $t = 1$ et $p = 1/2$. L'expression générale est

$$F_K(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt} \right)^K & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Méthode 2 — Décomposer le trajet en descentes successives d'un franc.

Pour passer du capital K au capital 0 par pas de 1 ou -1 , le joueur doit atteindre successivement $K - 1, K - 2, \dots, 0$. Pour un entier n fixé, une première ruine au lancer n détermine donc de façon unique K longueurs $m_1, \dots, m_K \geq 1$, de somme n , correspondant aux premières descentes de K à $K - 1$, puis de $K - 1$ à $K - 2$, jusqu'à celle de 1 à 0.

Réciproquement, si ces descentes s'effectuent pour la première fois aux fins des blocs successifs de longueurs $m_1, \dots, m_K$, la première ruine a lieu au lancer n . Pour des longueurs fixées, chaque condition porte sur un bloc déterminé de lancers. Par translation du capital, sa probabilité est $p_{m_j}(1)$. Les blocs sont indépendants, car ils concernent des lancers disjoints. Leur conjonction a donc pour probabilité

$$\prod_{j=1}^K p_{m_j}(1).$$

Les différentes décompositions sont disjointes par unicité des premières visites de ces

niveaux. Il en résulte la somme finie

$$p_n(K) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_K \geq 1 \\ m_1 + \dots + m_K = n}} \prod_{j=1}^K p_{m_j}(1).$$

On applique alors successivement la propriété du produit démontrée en partie 1, question 3. Tous les coefficients sont positifs et sommables ; chaque multiplication donne la convolution des coefficients déjà obtenus. Après K facteurs, la fonction génératrice de la suite de droite est $(F_1(t))^K$. Ainsi,

$$F_K(t) = (F_1(t))^K \quad (t \in [0, 1]).$$

La première méthode exploite directement la récurrence demandée et les deux valeurs initiales. La seconde explique la puissance K par les K descentes d'une unité ; elle utilise seulement des événements portant sur des blocs de longueurs fixées, sans supposer une propriété générale d'indépendance à un instant aléatoire.

c) On combine 1.b avec II.A.1.e :

$$P(R_K) = F_K(1) = (F_1(1))^K = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^K & \text{si } \frac{1}{2} < p < 1. \end{cases}$$

Si $p \leq 1/2$, tout capital initial fini conduit donc à la ruine presque sûre. Si $p > 1/2$, la probabilité de ruine décroît strictement avec K et tend vers 0 quand $K \rightarrow +\infty$, puisque $0 < q/p < 1$.

2. Espérance et temps d'attente de la ruine pour $p \leq \frac{1}{2}$.

Dans ce domaine, $P(R_K) = 1$: la loi de X_K , numéro du lancer de première ruine, est donnée par les coefficients $p_n(K)$. Comme pour X_1 , sa valeur sur un éventuel événement de non-ruine de probabilité nulle est sans effet sur sa loi.

Méthode 1 — Utiliser la fonction génératrice demandée.

Si $p < 1/2$, la fonction F_1 possède une dérivée à gauche finie en 1, égale à $1/(1 - 2p)$ d'après II.A.2, et $F_1(1) = 1$. La règle de dérivation d'une puissance entière s'applique à $F_K(t) = (F_1(t))^K$ et donne

$$F'_{K,g}(1) = K(F_1(1))^{K-1}F'_{1,g}(1) = \frac{K}{1 - 2p}.$$

La partie 1, question 2.f, établit alors l'existence de l'espérance et sa valeur :

$$E(X_K) = \frac{K}{1 - 2p} \quad (0 < p < \frac{1}{2}).$$

Pour $p = 1/2$, le taux d'accroissement de F_1 à gauche de 1 tend vers $+\infty$. La factorisation d'une différence de puissances donne, pour $0 < t < 1$,

$$\frac{F_K(t) - F_K(1)}{t - 1} = \frac{F_1(t) - 1}{t - 1} (1 + F_1(t) + \dots + (F_1(t))^{K-1}).$$

Le facteur entre parenthèses tend vers $K > 0$, puisque $F_1(t) \rightarrow 1$. Le premier facteur tend vers $+\infty$ d'après II.A.2; le produit tend donc vers $+\infty$. Ainsi, F_K ne possède pas de dérivée à gauche finie en 1. La série positive

$$\sum nP(X_K = n)$$

diverge vers $+\infty$, et X_K n'admet pas d'espérance finie.

Méthode 2 — Additionner les durées des descentes d'une unité.

On reprend la décomposition de II.B.1.b. La ruine étant presque sûre pour $p \leq 1/2$, les K durées successives $T_1, \dots, T_K$ de descente d'une unité sont finies presque sûrement et

$$X_K = T_1 + \dots + T_K.$$

Pour tous entiers $m_1, \dots, m_K \geq 1$, l'argument par blocs de longueurs fixées donne

$$P(T_1 = m_1, \dots, T_K = m_K) = \prod_{j=1}^K p_{m_j}(1).$$

Comme

$$\sum_{m \geq 1} p_m(1) = 1$$

dans ce domaine, chaque T_j a la même loi que X_1 ; la factorisation établit aussi leur indépendance. Si $p < 1/2$, II.A.2 garantit que chacune admet une espérance, égale à $1/(1 - 2p)$. La linéarité de l'espérance donne alors

$$E(X_K) = \sum_{j=1}^K E(T_j) = \frac{K}{1 - 2p}.$$

Si $p = 1/2$, on a $X_K \geq T_1 \geq 0$, et T_1 a la même loi que X_1 . Pour tout entier $M \geq 1$, la variable $\min(T_1, M)$ est bornée et

$$E(\min(T_1, M)) \geq \sum_{m=1}^M mP(T_1 = m).$$

Le membre de droite tend vers $+\infty$ d'après II.A.2. Si X_K admettait une espérance finie, la positivité de l'espérance et l'inégalité $\min(T_1, M) \leq X_K$ imposeraient $E(\min(T_1, M)) \leq E(X_K)$ pour tout M , ce qui est impossible. On retrouve l'absence d'espérance finie.

La première méthode vérifie l'existence du moment par le résultat analytique construit en partie 1. La seconde interprète le facteur K comme l'addition de K temps de descente. Dans les deux approches, au seuil $p = 1/2$, la ruine reste presque sûre mais le temps d'attente moyen est infini.

Relevé des adaptations

- I.2.b : le domaine de φ est rectifié de $[0, 1]$ en $[0, 1[$, car son quotient n'est pas défini en 1. La croissance demandée sur $[0, 1[$ est conservée.
- I.2.d : la première conclusion après passage à la limite en t est écrite avec la somme partielle

$$\sum_{k=0}^n kp_k,$$

avant d'établir la convergence puis la majoration de la somme infinie. Le PDF imprimait une somme infinie tout en conservant le quantificateur sur n ; la progression logique est rétablie.

- Préambule de II, II.A.1.b et II.B.1.a–b : l'indépendance des lancers est rendue explicite, et $p_n(K)$ désigne la première ruine au lancer n , conformément à l'arrêt définitif du jeu. Ces précisions justifient les produits de probabilités et la partition de l'événement de ruine sans changer le modèle.
- II.A.1.d : l'équation est rectifiée en $ptx^2 - x + (1 - p)t = 0$, au lieu de $ptx^2 - x + 1 - (1 - p)t = 0$ dans le PDF. Elle est ainsi cohérente avec II.A.1.c et avec le discriminant $1 - 4p(1 - p)t^2$. Tous les calculs qui suivent utilisent cette équation rectifiée.