



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1995

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

1. Étude d'une équation fonctionnelle.

On considère une fonction continue non identiquement nulle $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y). \quad (1)$$

a) En faisant $x = 0$ dans la relation (1), déterminer la valeur de $f(0)$.

b) En faisant $x = y = t/2$ dans la relation (1), établir que $f(t) \geq 0$ lorsque $t \geq 0$.

On se propose d'établir que $f(t) > 0$ lorsque $t \geq 0$. À cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un réel positif t_0 tel que $f(t_0) = 0$. En déduire que $f(t_0/2) = 0$, puis, pour tout entier $n \geq 1$, que $f(t_0/2^n) = 0$.

Montrer qu'alors $f(0) = 0$, et conclure.

c) Soit F la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction continue f s'annulant en 0. En intégrant sur $[0, 1]$ la fonction $y \mapsto f(x + y)$, établir la relation

$$\forall x > 0, \quad F(x + 1) - F(x) = F(1)f(x). \quad (2)$$

Montrer, à l'aide des questions précédentes, que $F(1) > 0$, et en déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

d) Par dérivation de la fonction $y \mapsto f(x + y)$, établir que

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) = f'(0)f(x). \quad (3)$$

e) On pose $\lambda = -f'(0)$. Par dérivation de la fonction $g : x \mapsto e^{\lambda x} f(x)$, déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de λ et de x .

f) Réciproquement, montrer que la fonction f ainsi obtenue vérifie la relation (1).

2. Étude d'une suite de fonctions.

a) On désigne par λ un réel strictement positif et par n un entier naturel non nul. Établir la convergence et déterminer, en fonction de λ et de n , la valeur de l'intégrale

$$K_n = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt.$$

b) On désigne par f_n la fonction définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{K_n} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

La formule en 0 signifie $f_1(0) = 1/K_1$ et $f_n(0) = 0$ pour $n \geq 2$.

Étudier, pour $n \geq 2$, les variations de f_n et déterminer son maximum M_n .

c) Étudier les positions relatives des courbes représentatives de f_n et de f_{n+1} .

d) Tracer sur une même figure les courbes représentatives de f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 .

e) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(M_n)_{n \geq 2}$.

On admet le résultat particulier suivant, pour cette seule suite et pour tout $\lambda > 0$ fixé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} M_n = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}.$$

Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire la limite de la suite $(M_n)_{n \geq 2}$.

Partie II

On considère les arrivées successives des clients à un guichet. Étant donnés deux réels t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$, on note $N(t_1; t_2)$ le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle $]t_1, t_2]$. On note $P(N(t_1; t_2) = n)$ la probabilité pour que n clients exactement se présentent dans cet intervalle.

Par convention, $P(N(t_1; t_1) = 0) = 1$ et $P(N(t_1; t_1) = n) = 0$ pour $n \geq 1$. On fait les hypothèses suivantes.

A) Pour tous réels $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, les variables $N(t_1; t_2)$ et $N(t_3; t_4)$ sont indépendantes. Les nombres de clients se présentant dans deux intervalles de temps disjoints sont donc indépendants.

B) Pour tout entier naturel n , il existe une fonction continue $p_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tous réels $t_1 \leq t_2$,

$$P(N(t_1; t_2) = n) = p_n(t_2 - t_1).$$

Ainsi, la probabilité pour que n clients se présentent entre deux instants dépend continûment de la durée séparant ces instants.

1. Équation fonctionnelle des fonctions p_n .

On considère deux réels positifs x, y .

a) Exprimer $P(N(0; x + y) = 0)$ en fonction de $P(N(0; x) = 0)$ et de $P(N(x; x + y) = 0)$, puis montrer que $p_0(x + y) = p_0(x)p_0(y)$.

Déduire de la partie I l'expression de $p_0(x)$, en posant $\lambda = -p'_0(0)$.

b) Établir plus généralement que, pour tout entier naturel n ,

$$p_n(x + y) = \sum_{k=0}^n p_{n-k}(x)p_k(y).$$

2. Loi de l'instant d'arrivée du premier client.

On fixe un instant origine et l'on note T_1 la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ indiquant l'instant d'arrivée du premier client à partir de cet instant origine.

- a) Justifier l'égalité des événements $[N(0; x) = 0]$ et $[T_1 > x]$.
- b) Dédire des résultats précédents la fonction de répartition et une densité de T_1 , dont on reconnaîtra la loi.
- c) Déterminer l'espérance et la variance de T_1 .

On conserve les hypothèses A et B et l'on fait de plus l'hypothèse suivante.

- C) Pour tous réels $t_1 < t_2$, la variable $N(t_1; t_2)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$.

3. Loi de l'instant d'arrivée du n -ième client.

On fixe un instant origine et l'on note T_n la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ indiquant l'instant d'arrivée du n -ième client, avec $n \geq 1$.

- a) Comparer, pour tout réel positif t , les événements $[N(0; t) \leq n - 1]$ et $[T_n > t]$.
- b) En déduire la fonction de répartition et une densité de T_2 , de T_3 , puis, plus généralement, la fonction de répartition F_n et une densité f_n de T_n . Cette loi particulière, définie par les formules obtenues, est appelée loi gamma de paramètres n et λ .
- c) Déterminer l'espérance et la variance de T_n .

4. Loi du nombre de clients procédant à un achat.

On désigne par p , avec $0 < p < 1$, la probabilité pour qu'un client se présentant au guichet procède à un achat. On note $A(t_1; t_2)$ le nombre de clients se présentant dans

$]t_1, t_2]$ et procédant à un achat. Les choix d'achat des clients sont indépendants entre eux et indépendants des arrivées.

a) Soient n, k deux entiers tels que $0 < k < n$. Déterminer

$$P(A(t_1; t_2) = k \mid N(t_1; t_2) = n),$$

et reconnaître la loi de $A(t_1; t_2)$ conditionnée par $N(t_1; t_2) = n$.

b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire la loi de $A(t_1; t_2)$ et préciser son espérance.

c) Donner de même la loi de la variable $B(t_1; t_2)$ indiquant le nombre de clients se présentant dans $]t_1, t_2]$ et ne procédant pas à un achat.

d) Étudier l'indépendance de $A(t_1; t_2)$ et de $B(t_1; t_2)$.