



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1995

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Étude d'une équation fonctionnelle.

Dans cette question, les dérivées au bord 0 sont des dérivées à droite. La notation C^1 sur $\mathbb{R}_+$ est comprise avec cette convention.

- a) Puisque f n'est pas identiquement nulle, il existe $y_0 \geq 0$ tel que $f(y_0) \neq 0$. La relation (1) avec $x = 0$ donne $f(y_0) = f(0)f(y_0)$. On peut diviser par $f(y_0)$ et conclure :

$$f(0) = 1.$$

- b) Pour $t \geq 0$, on prend $x = y = t/2$ dans (1) :

$$f(t) = f(t/2)^2 \geq 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $f(t_0) = 0$. L'égalité précédente impose $f(t_0/2) = 0$. Par récurrence, $f(t_0/2^n) = 0$ pour tout $n \geq 1$: si la propriété est vraie au rang n , on applique encore l'identité au réel $t_0/2^n$.

Comme $t_0/2^n \rightarrow 0$ et f est continue en 0, on obtient $f(0) = 0$, en contradiction avec a). Ainsi,

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) > 0.$$

- c) Puisque f est continue, sa primitive s'annulant en 0 est $F(x) = \int_0^x f(u) du$. Pour $x \geq 0$, on intègre (1) par rapport à y entre 0 et 1. Le changement affine $u = x + y$ et la propriété de Chasles donnent

$$\int_0^1 f(x+y) dy = \int_x^{x+1} f(u) du = F(x+1) - F(x),$$

$$\int_0^1 f(x)f(y) dy = f(x)F(1).$$

On obtient donc (2), et même sa validité pour $x = 0$. La fonction f est continue et strictement positive sur $[0, 1]$; l'intégrale d'une fonction continue positive, non identiquement nulle, est strictement positive. Ainsi $F(1) > 0$.

On peut dès lors écrire, pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{F(x+1) - F(x)}{F(1)}.$$

La fonction F est de classe C^1 , de dérivée continue f . La formule fournit directement une dérivée continue de f , y compris une dérivée à droite en 0 :

$$f'(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{F(1)}.$$

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$; aucun théorème de prolongement d'une dérivée n'est nécessaire.

- d)** Pour $x \geq 0$ fixé, on dérive $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y . Pour $y > 0$, on obtient $f'(x+y) = f(x)f'(y)$; en $y = 0$, la même identité s'obtient directement par les dérivées à droite, dont l'existence vient de c). On a donc

$$f'(x) = f(x)f'(0).$$

- e)** Méthode 1 — La fonction auxiliaire imposée.

On pose $\lambda = -f'(0)$, qui est ici un réel quelconque. D'après d), $f' = -\lambda f$. La fonction $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$ est de classe C^1 et

$$g'(x) = e^{\lambda x} (\lambda f(x) + f'(x)) = 0.$$

Elle est constante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = f(0) = 1$. Ainsi,

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = e^{-\lambda x}.$$

Méthode 2 — Passer au logarithme dans l'équation fonctionnelle.

La positivité établie en b) permet de définir $h(x) = \ln f(x)$, fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. La relation (1) devient $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Par récurrence, $h(mx) = mh(x)$ pour tout entier $m \geq 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on en déduit $h(1/n) = h(1)/n$, puis, pour tout entier $m \geq 0$,

$$h(m/n) = \frac{m}{n} h(1).$$

Pour un réel $x \geq 0$, la suite rationnelle $r_n = \lfloor nx \rfloor / n$ est positive et vérifie $0 \leq x - r_n < 1/n$. Elle converge donc vers x . Par continuité,

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n h(1) = x h(1).$$

On obtient $f(x) = e^{xh(1)}$. Sa dérivée à droite en 0 vaut $h(1)$; ainsi $h(1) = -\lambda$, et l'on retrouve $f(x) = e^{-\lambda x}$.

La première méthode exploite la régularité construite en c) et conduit à une équation différentielle. La seconde explique directement pourquoi la continuité et l'addition des arguments imposent une exponentielle.

f) Réciproquement, pour tout réel λ , la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$ est continue, strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et

$$e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

Elle vérifie donc toutes les hypothèses et la relation (1). Les solutions non identiquement nulles sont exactement ces fonctions, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Étude d'une suite de fonctions.

Dans toute cette question, on reprend un paramètre $\lambda > 0$, comme l'impose l'énoncé.

a) Pour $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto t^{n-1} e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, en interprétant $t^0 = 1$ lorsque $n = 1$. Il n'y a donc pas de difficulté en 0. À l'infini, les croissances comparées donnent

$$t^{n-1} e^{-\lambda t} = o(e^{-\lambda t/2}).$$

L'intégrale de $e^{-\lambda t/2}$ sur $[0, +\infty[$ converge puisque $\lambda > 0$. La comparaison des fonctions positives prouve que K_n est fini. Il est strictement positif, l'intégrande étant strictement positif sur $]0, +\infty[$.

On calcule d'abord $K_1 = 1/\lambda$. Pour $n \geq 1$ et $R > 0$, une intégration par parties sur le segment $[0, R]$ donne

$$\int_0^R t^n e^{-\lambda t} dt = -\frac{R^n e^{-\lambda R}}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} \int_0^R t^{n-1} e^{-\lambda t} dt.$$

Les intégrales convergent et $R^n e^{-\lambda R} \rightarrow 0$ par croissances comparées. En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient $K_{n+1} = nK_n/\lambda$. Par récurrence,

$$K_n = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \quad (n \geq 1).$$

b) Question adaptée au programme actuel : les valeurs en 0 sont explicitées dans l'énoncé ; elles précisent la même fonction.

La formule de a) donne, pour $t \geq 0$,

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}.$$

Pour $n \geq 2$ et $t > 0$,

$$f'_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-2} e^{-\lambda t} (n-1-\lambda t).$$

Les facteurs autres que la parenthèse sont strictement positifs. Ainsi, f_n est nulle sur $] -\infty, 0]$, strictement croissante de 0 à $(n-1)/\lambda$, puis strictement décroissante vers 0 sur $[(n-1)/\lambda, +\infty[$. La limite en $+\infty$ vient des croissances comparées. Son unique point de maximum global est $(n-1)/\lambda$, et

$$M_n = f_n\left(\frac{n-1}{\lambda}\right) = \lambda \frac{(n-1)^{n-1} e^{-(n-1)}}{(n-1)!}.$$

La précision de l'énoncé en 0 donne bien $f_n(0) = 0$ pour $n \geq 2$. Pour le tracé demandé ensuite, $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}_+$ est strictement décroissante, avec $f_1(0) = \lambda$ et une limite à gauche nulle en 0.

c) Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, $f_n(t) > 0$ et

$$\frac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)} = \frac{\lambda t}{n}.$$

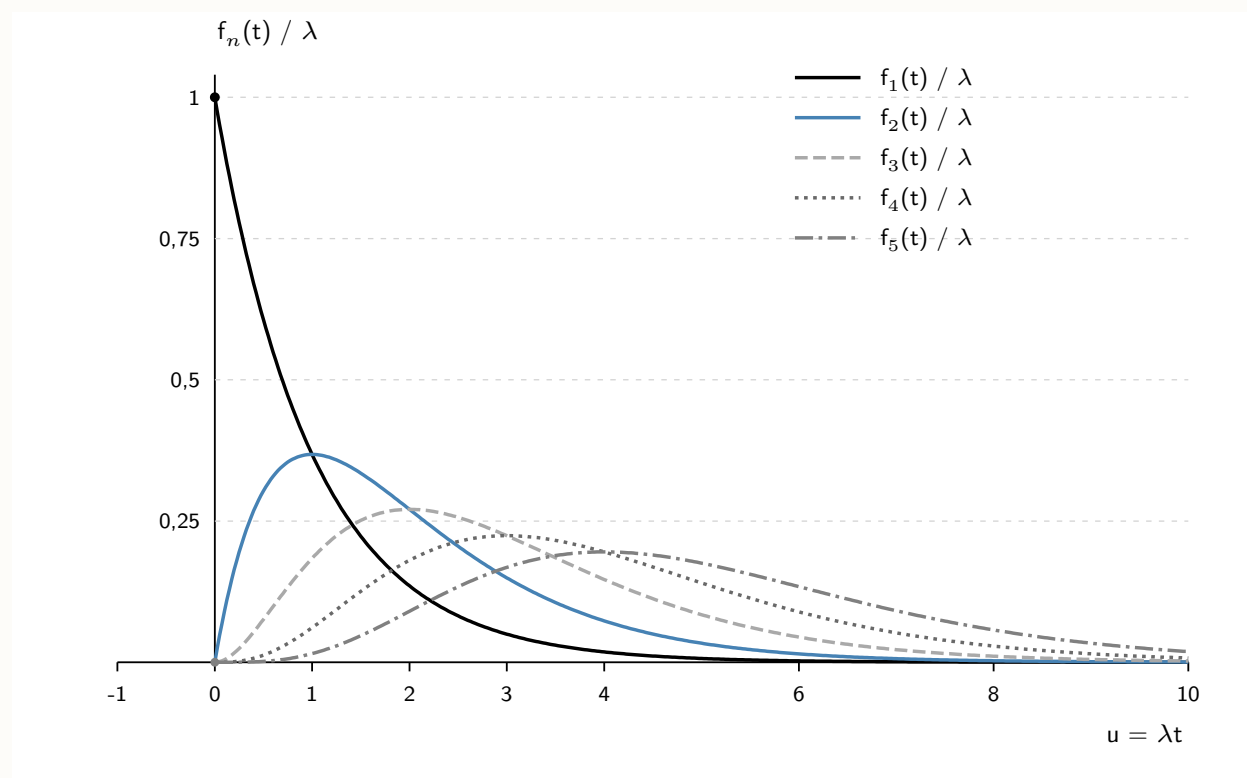
Par conséquent, $f_{n+1}(t) < f_n(t)$ pour $0 < t < n/\lambda$, les deux fonctions sont égales en $t = n/\lambda$, et $f_{n+1}(t) > f_n(t)$ pour $t > n/\lambda$. Elles sont toutes deux nulles pour $t < 0$. En 0, elles sont égales si $n \geq 2$, tandis que $f_2(0) = 0 < f_1(0) = \lambda$.

Les intersections sur l'axe positif se déplacent ainsi vers la droite lorsque n augmente ; leurs maxima se situent respectivement en $(n-1)/\lambda$ et n/λ .

d) Pour représenter les cinq courbes sans choisir une valeur arbitraire de λ , on utilise l'abscisse réduite $u = \lambda t$ et l'ordonnée réduite $f_n(t)/\lambda$. Sur $u \geq 0$, les courbes sont exactement celles des fonctions

$$u \mapsto e^{-u}, \quad ue^{-u}, \quad \frac{u^2}{2}e^{-u}, \quad \frac{u^3}{6}e^{-u}, \quad \frac{u^4}{24}e^{-u}.$$

Sur $u < 0$, les cinq fonctions sont nulles. Les maxima de f_2, f_3, f_4, f_5 ont pour abscisses réduites 1, 2, 3, 4. Le point supérieur à l'origine correspond à $f_1(0)/\lambda = 1$; les autres fonctions valent 0 en 0.



Pour retrouver les axes non réduits, on divise les abscisses indiquées par λ et l'on multiplie les ordonnées par λ . Le tracé représente ainsi toutes les valeurs du paramètre strictement positif, avec les positions relatives déterminées en c).

e) Les M_n sont strictement positifs. Pour $n \geq 2$, leur quotient vaut

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}.$$

Pour $v > 0$, la fonction $v \mapsto v - \ln(1 + v)$ a pour dérivée $v/(1 + v) > 0$ et vaut 0 en 0.

Donc $\ln(1 + v) < v$. En prenant $v = 1/(n - 1)$,

$$\ln \left(\frac{M_{n+1}}{M_n} \right) = -1 + (n - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n - 1} \right) < 0.$$

Ainsi, (M_n) est strictement décroissante et minorée par 0 ; le théorème de la limite monotone montre qu'elle converge vers une limite positive ou nulle.

Question adaptée au programme actuel. Résultat admis dans cette version adaptée : pour la seule suite étudiée et pour tout $\lambda > 0$ fixé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} M_n = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ce résultat particulier remplace l'admission d'un équivalent général de la factorielle. Il n'est pas démontré ici. Sa limite est strictement positive ; en divisant par elle, on obtient

$$\frac{M_n}{\lambda/\sqrt{2\pi n}} \longrightarrow 1.$$

Par définition d'un équivalent,

$$M_n \sim \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Le membre de droite tend vers 0, donc la limite de (M_n) est 0. L'admission précise la vitesse de décroissance des maxima ; les variations avaient été établies indépendamment.

Partie II

1. Équation fonctionnelle des fonctions p_n .

a) Les nombres de clients s'ajoutent sur deux intervalles consécutifs :

$$N(0; x + y) = N(0; x) + N(x; x + y).$$

Comme ces nombres sont des entiers positifs ou nuls, l'événement où leur somme est nulle est exactement $[N(0; x) = 0] \cap [N(x; x + y) = 0]$. Les deux variables sont indépendantes par A), y compris lorsqu'un intervalle est vide, puisque son nombre de clients est alors certain égal à 0. Par B),

$$p_0(x + y) = p_0(x)p_0(y).$$

La fonction p_0 est continue par B) et non identiquement nulle, puisque $p_0(0) = 1$. On peut donc appliquer I.1. Elle est de classe C^1 et, en posant $\lambda = -p'_0(0)$,

$$p_0(x) = e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

À ce stade, on sait aussi que $\lambda \geq 0$: si $\lambda < 0$, $p_0(1) = e^{-\lambda} > 1$, ce qui est impossible pour une probabilité. La stricte positivité sera justifiée en II.2.b à partir de l'existence du premier instant d'arrivée fini.

b) Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'événement $[N(0; x + y) = n]$ est la réunion disjointe, pour $k = 0, \dots, n$, des événements

$$[N(0; x) = n - k] \cap [N(x; x + y) = k].$$

Chaque client appartient à un seul des deux intervalles, et les deux nombres sont positifs ou nuls; cette décomposition décrit donc toutes les possibilités et ne les compte qu'une fois. Par additivité sur cette réunion finie puis par A),

$$P(N(0; x + y) = n) = \sum_{k=0}^n P(N(0; x) = n - k)P(N(x; x + y) = k).$$

L'hypothèse B) donne finalement

$$p_n(x + y) = \sum_{k=0}^n p_{n-k}(x)p_k(y).$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, la convention sur les intervalles vides réduit la somme au terme attendu. Aucun conditionnement par un événement de probabilité nulle n'est utilisé.

2. Loi de l'instant d'arrivée du premier client.

a) Pour $x \geq 0$, il n'y a aucun client arrivé entre l'instant origine et x si et seulement si le premier client arrive strictement après x . L'extrémité x est incluse dans l'intervalle

de comptage; un client arrivé exactement en x appartient donc au complémentaire des deux événements. Ainsi,

$$[N(0; x) = 0] = [T_1 > x].$$

b) Pour $x < 0$, $P(T_1 \leq x) = 0$, puisque T_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, a) et II.1.a donnent

$$P(T_1 \leq x) = 1 - P(T_1 > x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Justifions que $\lambda > 0$. L'énoncé définit T_1 comme une variable réelle finie. Les événements $[T_1 > m]$, pour $m \in \mathbb{N}$, décroissent donc vers l'événement impossible. La continuité décroissante des probabilités donne $P(T_1 > m) \rightarrow 0$. Or cette probabilité vaut $e^{-\lambda m}$, et l'on sait $\lambda \geq 0$. La valeur $\lambda = 0$ donnerait toujours 1 et est donc exclue. Ainsi $\lambda > 0$.

La fonction de répartition est

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en 0, et de classe C^1 en dehors de 0. Une densité est

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ses limites latérales en 0 sont finies; la valeur en ce point peut être choisie comme ci-dessus sans modifier les intégrales. On reconnaît la loi exponentielle de paramètre λ .

c) Méthode 1 — Reconnaître la loi usuelle.

D'après b), T_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Les formules de cette loi assurent l'existence de l'espérance et de la variance et donnent

$$E(T_1) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(T_1) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Méthode 2 — Retrouver les moments par les intégrales de I.2.

Les intégrales de $xf_1(x)$ et de $x^2f_1(x)$ sont celles de fonctions positives et valent respectivement λK_2 et λK_3 . Elles convergent d'après I.2.a. Ainsi,

$$E(T_1) = \lambda K_2 = \lambda \frac{1!}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda},$$

$$E(T_1^2) = \lambda K_3 = \lambda \frac{2!}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

La formule de Koenig-Huygens donne $V(T_1) = E(T_1^2) - E(T_1)^2 = 1/\lambda^2$. La première méthode utilise immédiatement l'identification de la loi; la seconde vérifie les formules et prépare le calcul pour un instant d'arrivée quelconque.

3. Loi de l'instant d'arrivée du n -ième client.

On utilise désormais C), avec le paramètre $\lambda > 0$ obtenu ci-dessus.

- a) Pour $t \geq 0$, le n -ième client n'est pas encore arrivé à l'instant t si et seulement si le nombre de clients déjà arrivés est strictement inférieur à n . Ce nombre étant entier, cela s'écrit

$$[T_n > t] = [N(0; t) \leq n - 1].$$

L'extrémité t étant incluse dans le comptage, l'égalité reste cohérente si le n -ième client arrive exactement en t .

- b) Pour $t > 0$, la variable $N(0; t)$ suit la loi de Poisson de paramètre λt . La question a) donne

$$P(T_n > t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

À $t = 0$, la même expression vaut 1 et correspond à la convention $N(0; 0) = 0$. La fonction de répartition est donc

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

En particulier, pour $t \geq 0$,

$$F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t), \quad F_3(t) = 1 - e^{-\lambda t} \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} \right).$$

Pour obtenir une densité lorsque $n \geq 2$, on dérive la somme finie, ce qui ne pose aucune question d'échange avec une série. Pour $t > 0$,

$$F'_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Les termes d'indices 0 à $n-2$ se compensent. Il reste

$$F'_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}.$$

La fonction F_n est continue en 0 car sa valeur à droite y est $1 - 1 = 0$, et elle est de classe C^1 ailleurs. Une densité est donc précisément la fonction étudiée en I.2 :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

avec $f_1(0) = \lambda$ et $f_n(0) = 0$ si $n \geq 2$. Les limites latérales sont finies ; pour $n \geq 2$, la densité est même continue en 0. La normalisation est également vérifiée par I.2.a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = K_n / K_n = 1.$$

Pour T_2 et T_3 , cela donne respectivement

$$f_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad f_3(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2} e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0),$$

et des valeurs nulles lorsque $t < 0$. Le cas $n = 1$ redonne II.2. Le nom de la famille n'est utilisé qu'après ces calculs ; aucune propriété supplémentaire de cette loi n'est supposée connue.

- c) Le transfert et I.2.a permettent de calculer les moments. Les intégrales sont positives et convergent puisqu'elles font intervenir K_{n+1} et K_{n+2} , déjà étudiées. Ainsi,

$$E(T_n) = \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{n!/\lambda^{n+1}}{(n-1)!/\lambda^n} = \frac{n}{\lambda},$$

$$E(T_n^2) = \frac{K_{n+2}}{K_n} = \frac{(n+1)!/\lambda^{n+2}}{(n-1)!/\lambda^n} = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}.$$

La formule de Koenig-Huygens donne donc

$$V(T_n) = \frac{n(n+1)}{\lambda^2} - \frac{n^2}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Ces expressions comprennent le cas $n = 1$ et sont cohérentes avec II.2.c.

4. Loi du nombre de clients procédant à un achat.

Pour alléger les calculs, fixons $t_1 < t_2$ et posons $h = t_2 - t_1 > 0$, $\Lambda = \lambda h > 0$, $q = 1 - p$, $N = N(t_1; t_2)$, $A = A(t_1; t_2)$ et $B = B(t_1; t_2)$. On a $N = A + B$.

Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des choix d'achat et des arrivées est explicitée dans l'énoncé. Elle assure que, sachant le nombre de clients, leurs choix restent indépendants et de probabilité p .

- a) Puisque N suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda > 0$, $P(N = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: les conditionnements considérés sont bien définis. Sachant $N = n$, le nombre d'acheteurs compte les succès parmi n choix indépendants de probabilité p . Il suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et, pour les indices demandés,

$$P(A = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Pour identifier toute la loi conditionnelle et l'utiliser ensuite, la formule vaut également pour $k = 0$ et $k = n$; la probabilité est nulle si $k < 0$ ou $k > n$. Lorsque $n = 0$, le nombre

A est certain égal à 0 sous cette condition.

- b) Les événements $[N = n], n \in \mathbb{N}$, forment un système complet de probabilités strictement positives. Pour $k \in \mathbb{N}$, les probabilités totales donnent

$$P(A = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n)P(A = k \mid N = n).$$

On remplace les termes par les lois obtenues, puis on pose $j = n - k$:

$$P(A = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = e^{-\Lambda} \frac{(\Lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\Lambda q)^j}{j!}.$$

La série exponentielle converge et sa somme vaut $e^{\Lambda q}$. Les termes étant tous positifs, le changement d'indice et la factorisation ne soulèvent aucune difficulté de convergence. Comme $p + q = 1$,

$$P(A = k) = e^{-\Lambda p} \frac{(\Lambda p)^k}{k!}.$$

Ainsi, A suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda p = \lambda p(t_2 - t_1)$, et son espérance existe et vaut

$$E(A(t_1; t_2)) = \lambda p(t_2 - t_1).$$

- c) Un client ne procède pas à un achat avec la probabilité $q = 1 - p$. Les choix correspondants sont également indépendants entre eux et du flux d'arrivées. Le calcul de b), avec p remplacé par q , donne, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$P(B = \ell) = e^{-\Lambda q} \frac{(\Lambda q)^\ell}{\ell!}.$$

La variable $B(t_1; t_2)$ suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - p)(t_2 - t_1)$; son espérance vaut $\lambda(1 - p)(t_2 - t_1)$.

- d) On calcule la loi conjointe pour vérifier l'indépendance; la seule relation $A + B = N$ ne suffit pas à conclure. Pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, l'événement $[A = k] \cap [B = \ell]$ est exactement $[N = k + \ell] \cap [A = k]$. D'après a),

$$P(A = k, B = \ell) = e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \binom{k+\ell}{k} p^k q^\ell.$$

En simplifiant la factorielle et en utilisant $e^{-\Lambda} = e^{-\Lambda p} e^{-\Lambda q}$, on obtient

$$P(A = k, B = \ell) = \left(e^{-\Lambda p} \frac{(\Lambda p)^k}{k!} \right) \left(e^{-\Lambda q} \frac{(\Lambda q)^\ell}{\ell!} \right) = P(A = k) P(B = \ell).$$

Cette factorisation vaut pour toutes les valeurs possibles du couple. Les variables $A(t_1; t_2)$ et $B(t_1; t_2)$ sont donc indépendantes.

Pour un intervalle vide $t_1 = t_2$, les deux nombres seraient certains égaux à 0, donc encore indépendants; ce cas se traite directement, sans conditionner par des valeurs impossibles de N .

Relevé des adaptations

- I.2.b : explicitation de la valeur en 0, afin de lever l'ambiguïté de l'écriture de la puissance pour $n = 1$; les fonctions sont inchangées.
- I.2.e : remplacement de la formule asymptotique générale admise dans le PDF par le seul résultat particulier $\sqrt{n} M_n \rightarrow \lambda / \sqrt{2\pi}$ nécessaire à la question. La monotonie et l'existence d'une limite restent démontrées; l'équivalent des maxima est déduit de cette admission précise.
- II.4.a-d : précision de l'indépendance entre les choix d'achat et les arrivées, nécessaire pour conserver la loi binomiale conditionnelle et l'amincissement du nombre de clients. Le modèle et toutes les questions sont conservés.