



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1994

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

1. Étude de suites récurrentes linéaires.

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$, la relation

$$9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0. \quad (1)$$

a) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.

b) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n \geq 1}$ vérifiant (1).

c) On considère une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant (1).

Exprimer en fonction de u_1, u_2, u_3 trois réels α, β, γ tels que

$$\begin{cases} u_1 = \alpha + \frac{\sqrt{7}}{3}\beta - \frac{\sqrt{7}}{3}\gamma, \\ u_2 = \alpha + \frac{7}{9}\beta + \frac{7}{9}\gamma, \\ u_3 = \alpha + \frac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \frac{7\sqrt{7}}{27}\gamma. \end{cases}$$

On formera $9u_3 - 7u_1$. On donnera les expressions exactes de α, β, γ .

On associe à $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n = u_n - \alpha - \beta \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n - \gamma \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n.$$

Établir qu'elle vérifie (1), puis, en remarquant que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, montrer que $v_n = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exprimer enfin u_n en fonction de n .

- d) En déduire que l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant (1) est l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites obtenues au b).

2. Étude des puissances d'une matrice.

On se propose d'étudier la suite $(M^n)_{n \geq 1}$ des puissances de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer M^2, M^3, M^4 et en déduire que M vérifie les deux propriétés suivantes :

$$9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0; \quad (2)$$

les matrices M, M^2, M^3 sont linéairement indépendantes. (3)

- b) On se propose d'établir, pour tout entier $n \geq 1$, l'existence et l'unicité de trois réels a_n, b_n, c_n tels que

$$M^n = a_n M + b_n M^2 + c_n M^3. \quad (4)$$

Établir, pour tout entier $n \geq 1$, l'unicité des réels a_n, b_n, c_n , s'ils existent.

Déterminer a_n, b_n, c_n pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Établir par récurrence l'existence de a_n, b_n, c_n dans le cas général. On explicitera $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n .

- c) Vérifier par récurrence que $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout entier $n \geq 1$.
- d) En multipliant par M^{n-1} la relation (2), établir que les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ vérifient la relation (1).
- e) En appliquant à la suite (b_n) les résultats obtenus à la question 1, établir, pour tout entier $n \geq 1$, la formule

$$b_n = \frac{9}{14} \left(\left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n \right).$$

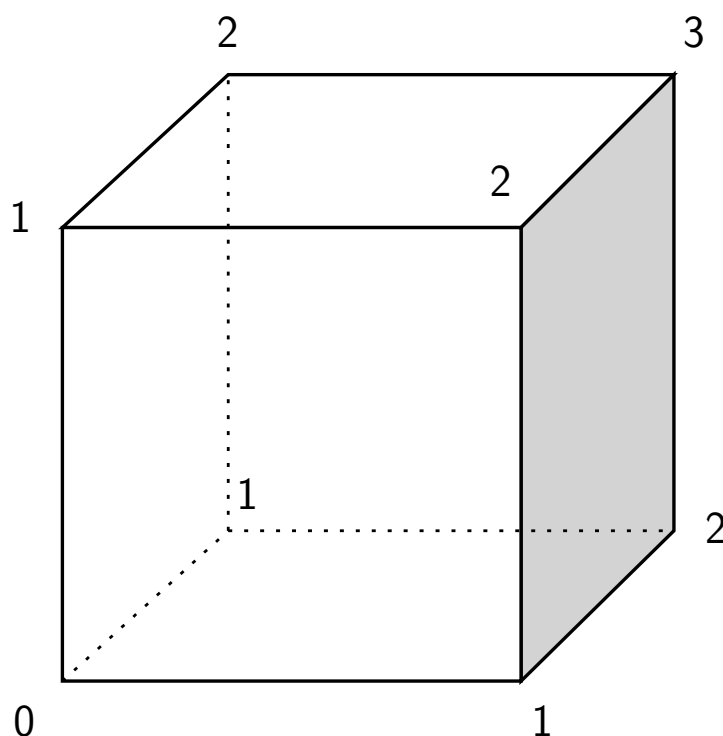
Déterminer de même les expressions de a_n et de c_n .

Partie II

On considère un cube dont le sommet de départ porte le numéro 0. Chacun des autres sommets porte le numéro 1, 2 ou 3 selon que sa distance au sommet 0, mesurée en nombre minimal d'arêtes, vaut 1, 2 ou 3. Plusieurs sommets portent donc le même numéro.

On considère le mouvement d'un point P , situé au sommet 0 à l'instant 0, puis se déplaçant parmi les sommets du cube selon les règles suivantes.

- (1) Lorsque le point atteint à l'instant n un sommet S autre que le sommet 3, il se situe à l'instant $n + 1$, de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets reliés à S par une arête.
- (2) Lorsque le point atteint le sommet 3, il y reste définitivement.



Pour tout entier naturel n , on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n ; en particulier, $X_0 = 0$.

On note T l'instant où le point atteint pour la première fois le sommet 3, lorsqu'il l'atteint. Avant d'avoir établi que cette atteinte a lieu avec probabilité 1, l'événement $[T = k]$ désigne l'événement «la première atteinte a lieu à l'instant k ».

1. Lois des variables aléatoires X_n .

Pour tout entier naturel n , on note U_n le vecteur-colonne dont les composantes, de haut en bas, sont $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.

a) Expliciter U_0, U_1, U_2 .

b) Exprimer, pour $i = 0, 1, 2, 3$, la probabilité $P(X_{n+1} = i)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.

En déduire une matrice M d'ordre 4 telle que $U_{n+1} = MU_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

- c) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0 , et en déduire l'expression du vecteur U_n et de la loi de X_n en fonction des réels a_n, b_n, c_n définis dans la partie I.

2. Loi de la variable aléatoire T .

- a) Montrer que T ne peut prendre avec une probabilité non nulle que des valeurs impaires supérieures ou égales à 3. Donner la probabilité de l'événement $[T = 3]$.
- b) Comparer les événements $[X_{2n} = 2] \cap [X_{2n+1} = 3]$ et $[T = 2n + 1]$. En déduire la probabilité de l'événement $[T = 2n + 1]$.
- c) Vérifier alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n + 1) = 1.$$

- d) Calculer enfin l'espérance de T .