



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1994

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Dans cette partie, on pose $q = \sqrt{7}/3$. Alors $0 < q < 1$ et $q^2 = 7/9$.

1. Étude de suites récurrentes linéaires.

a) On regroupe les termes pour faire apparaître le facteur $x - 1$:

$$9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 9x^2(x - 1) - 7(x - 1) = (x - 1)(9x^2 - 7).$$

Le produit est nul si et seulement si $x = 1$ ou $x^2 = 7/9$. Les trois solutions réelles, distinctes, sont donc

$$1, \quad q = \frac{\sqrt{7}}{3}, \quad -q = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

b) La suite $(r^n)_{n \geq 1}$ est non nulle si et seulement si $r \neq 0$. En substituant son expression dans (1), on obtient

$$9r^{n+3} - 9r^{n+2} - 7r^{n+1} + 7r^n = r^n(9r^3 - 9r^2 - 7r + 7).$$

Pour $r \neq 0$, la condition recherchée est donc exactement l'équation résolue en a). Les trois suites sont

$$(1)_{n \geq 1}, \quad (q^n)_{n \geq 1}, \quad ((-q)^n)_{n \geq 1}.$$

c) Suivons l'indication de l'énoncé. Dans le système demandé, les termes en β et γ s'éliminent en formant $9u_3 - 7u_1$, car $9q^3 = 7q$. Il reste $9u_3 - 7u_1 = 2\alpha$, d'où

$$\alpha = \frac{9u_3 - 7u_1}{2}.$$

La deuxième équation et la première donnent respectivement

$$\beta + \gamma = \frac{9}{7}(u_2 - \alpha), \quad \beta - \gamma = \frac{3}{\sqrt{7}}(u_1 - \alpha).$$

On additionne puis on soustrait ces deux égalités :

$$\beta = \frac{9}{14}(u_2 - \alpha) + \frac{3}{2\sqrt{7}}(u_1 - \alpha),$$

$$\gamma = \frac{9}{14}(u_2 - \alpha) - \frac{3}{2\sqrt{7}}(u_1 - \alpha).$$

En remplaçant α , cela donne les expressions ne faisant intervenir que les données initiales :

$$\beta = \frac{9}{28}(7u_1 + 2u_2 - 9u_3) + \frac{27}{4\sqrt{7}}(u_1 - u_3),$$

$$\gamma = \frac{9}{28}(7u_1 + 2u_2 - 9u_3) - \frac{27}{4\sqrt{7}}(u_1 - u_3).$$

Ces opérations sont réversibles : elles fournissent l'unique solution du système, et les trois premières valeurs de $v_n = u_n - \alpha - \beta q^n - \gamma(-q)^n$ sont nulles.

Vérifions la relation de récurrence pour v . L'application qui associe à une suite w l'expression $9w_{n+3} - 9w_{n+2} - 7w_{n+1} + 7w_n$ est linéaire. Elle s'annule pour u , par hypothèse, et pour chacune des trois suites de b). Elle s'annule donc aussi pour leur différence v .

Enfin, (1) s'écrit

$$v_{n+3} = v_{n+2} + \frac{7}{9}v_{n+1} - \frac{7}{9}v_n.$$

Les trois premiers termes sont nuls. Si trois termes consécutifs v_n, v_{n+1}, v_{n+2} sont nuls, cette égalité donne $v_{n+3} = 0$. Une récurrence établit donc $v_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi,

$$u_n = \alpha + \beta q^n + \gamma(-q)^n \quad (n \geq 1),$$

avec les coefficients exacts ci-dessus. Ce raisonnement établit la formule particulière demandée sans utiliser un théorème général sur les récurrences d'ordre 3.

d) Méthode 1 — Utiliser la formule déjà démontrée et la linéarité.

La question c) montre que toute suite solution est une combinaison linéaire des trois suites de b). Réciproquement, chacune de ces trois suites vérifie (1), et toute combinaison linéaire la vérifie, puisque la relation est linéaire. Les deux ensembles sont donc égaux.

Méthode 2 — Ramener la relation à une récurrence d'ordre 2.

Posons $w_n = u_{n+1} - u_n$ pour $n \geq 1$. La relation (1) devient $9w_{n+2} - 7w_n = 0$, soit $w_{n+2} = q^2 w_n$. C'est une récurrence d'ordre 2 dont les deux racines réelles distinctes sont q et $-q$. Par la résolution de ces récurrences,

$$w_n = Aq^{n-1} + B(-q)^{n-1},$$

où les deux valeurs initiales imposent

$$A = \frac{1}{2} \left(u_2 - u_1 + \frac{u_3 - u_2}{q} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(u_2 - u_1 - \frac{u_3 - u_2}{q} \right).$$

En sommant les différences de u_1 à u_n , et puisque $q \neq 1$ et $-q \neq 1$, on obtient

$$u_n = u_1 + A \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + B \frac{1 - (-q)^{n-1}}{1 + q}.$$

Cette expression est de la forme $C + Dq^n + E(-q)^n$, avec

$$C = u_1 + \frac{A}{1 - q} + \frac{B}{1 + q}, \quad D = -\frac{A}{q(1 - q)}, \quad E = \frac{B}{q(1 + q)}.$$

Réciproquement, les trois suites de b) et leurs combinaisons satisfont (1), comme déjà vérifié. On retrouve donc exactement le même ensemble. La première méthode suit le guidage du sujet; la seconde montre comment exploiter le facteur $x - 1$ en étudiant les différences successives.

2. Étude des puissances d'une matrice.

a) Les produits se calculent ligne par colonne. Par exemple, $(M^2)_{11} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$,

$(M^2)_{22} = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$, et $(M^2)_{43} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. En calculant de la même

façon chaque coefficient, on obtient

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{7}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

On multiplie ensuite ces résultats par M . Dans $M^3 = M^2 M$, on a par exemple

$$(M^3)_{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{27} \text{ et } (M^3)_{41} = \frac{2}{9}. \text{ Dans } M^4 = M^3 M, \text{ on a}$$

$$(M^4)_{42} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{13}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{81}. \text{ Les matrices complètes sont}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{27} & 0 & 0 \\ \frac{7}{9} & 0 & \frac{14}{27} & 0 \\ 0 & \frac{14}{27} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{13}{27} & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{27} & 0 & \frac{14}{81} & 0 \\ 0 & \frac{49}{81} & 0 & 0 \\ \frac{14}{27} & 0 & \frac{28}{81} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{32}{81} & \frac{13}{27} & 1 \end{pmatrix}.$$

Les quatre produits scalaires par 9, -9 , -7 , 7 donnent, coefficient par coefficient, la matrice nulle. Par exemple, les coefficients $(1, 1)$ et $(4, 2)$ valent respectivement

$$9 \frac{7}{27} - 7 \frac{1}{3} = 0, \quad 9 \frac{32}{81} - 9 \frac{2}{9} - 7 \frac{2}{9} = 0.$$

Les matrices explicites établissent donc

$$9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0.$$

Pour l'indépendance linéaire, supposons $xM + yM^2 + zM^3 = 0$. Le coefficient $(4, 1)$ donne $2z/9 = 0$, donc $z = 0$. Le coefficient $(1, 1)$ donne ensuite $y/3 = 0$, donc $y = 0$. Enfin, le coefficient $(2, 1)$ donne $x = 0$. La seule combinaison nulle est donc la combinaison à coefficients tous nuls : M, M^2, M^3 sont linéairement indépendantes.

b) Si deux triplets représentent la même puissance, leur différence fournit une combinaison nulle de M, M^2, M^3 . Leur indépendance, établie en a), impose l'égalité des trois coefficients. Le triplet est donc unique dès qu'il existe.

Pour $n = 1, 2, 3$, les représentations immédiates et l'unicité donnent

n	a_n	b_n	c_n
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

La relation (2) s'écrit $M^4 = -\frac{7}{9}M + \frac{7}{9}M^2 + M^3$, d'où

$$(a_4, b_4, c_4) = \left(-\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, 1\right).$$

Supposons la représentation établie au rang $n \geq 1$. En multipliant par M , puis en remplaçant M^4 , on obtient

$$M^{n+1} = a_n M^2 + b_n M^3 + c_n \left(-\frac{7}{9}M + \frac{7}{9}M^2 + M^3\right).$$

Il existe donc une représentation au rang $n + 1$, et son unique triplet vérifie

$$a_{n+1} = -\frac{7}{9}c_n, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{7}{9}c_n, \quad c_{n+1} = b_n + c_n.$$

Le rang 1 étant établi, la récurrence prouve l'existence pour tous les rangs demandés, et l'argument initial donne l'unicité à chacun d'eux.

c) Au rang 1, on a $a_1 + b_1 + c_1 = 1$. Les relations de b) donnent, pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = -\frac{7}{9}c_n + a_n + \frac{7}{9}c_n + b_n + c_n = a_n + b_n + c_n.$$

La somme est donc conservée d'un rang au suivant. Par récurrence,

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad (n \geq 1).$$

d) Pour $n \geq 1$, l'exposant $n - 1$ est un entier naturel ; la multiplication demandée est donc définie, avec $M^0 = I_4$ si $n = 1$. Elle donne

$$9M^{n+3} - 9M^{n+2} - 7M^{n+1} + 7M^n = 0.$$

On remplace chacune de ces puissances par sa représentation unique. Le coefficient de M dans la combinaison résultante est $9a_{n+3} - 9a_{n+2} - 7a_{n+1} + 7a_n$, et les coefficients de M^2 et M^3 sont les expressions analogues avec b et c . L'indépendance de M, M^2, M^3 impose l'annulation séparée de ces trois coefficients. Chacune des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ vérifie donc (1).

e) La question 1.c s'applique à chacune de ces suites, grâce à d). Pour (b_n) , les valeurs initiales sont $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$. On obtient $\alpha_b = 0$, puis $\beta_b = \gamma_b = 9/14$. Ainsi,

$$b_n = \frac{9}{14}(q^n + (-q)^n).$$

Pour (a_n) , les valeurs initiales $(1, 0, 0)$ donnent

$$\alpha_a = -\frac{7}{2}, \quad \beta_a = \frac{9}{4} + \frac{27}{4\sqrt{7}}, \quad \gamma_a = \frac{9}{4} - \frac{27}{4\sqrt{7}}.$$

On en déduit

$$a_n = -\frac{7}{2} + \frac{9}{4}(q^n + (-q)^n) + \frac{27}{4\sqrt{7}}(q^n - (-q)^n).$$

Pour (c_n) , les valeurs initiales $(0, 0, 1)$ donnent

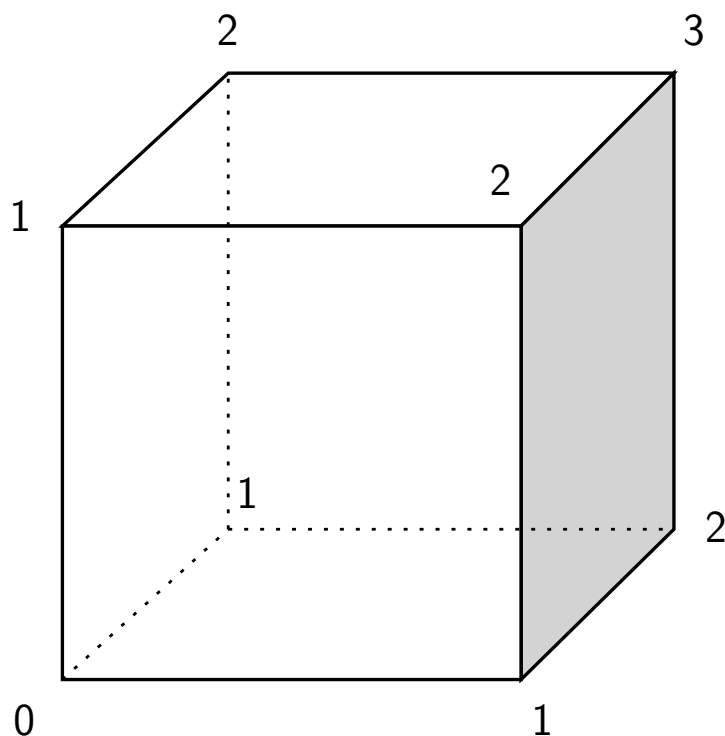
$$\alpha_c = \frac{9}{2}, \quad \beta_c = -\frac{81}{28} - \frac{27}{4\sqrt{7}}, \quad \gamma_c = -\frac{81}{28} + \frac{27}{4\sqrt{7}}.$$

Finalement,

$$c_n = \frac{9}{2} - \frac{81}{28}(q^n + (-q)^n) - \frac{27}{4\sqrt{7}}(q^n - (-q)^n).$$

Ces expressions sont valables pour tout $n \geq 1$. En les additionnant, les coefficients de $q^n + (-q)^n$ et de $q^n - (-q)^n$ s'annulent, et la constante vaut 1, ce qui confirme c).

Partie II



Un numéro désigne ici la distance au sommet initial et non un sommet distinct : trois sommets portent le numéro 1, trois portent le numéro 2, et les numéros 0 et 3 correspondent chacun à un unique sommet.

1. Lois des variables aléatoires X_n .

- a) À l'instant 0, le point est au sommet 0. Après un déplacement, il est nécessairement sur un sommet de numéro 1. De chacun de ces sommets, une arête ramène au numéro 0 et les deux autres conduisent au numéro 2. Les choix étant équiprobables,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Comptons les arêtes à partir de chaque classe. Du numéro 0, on passe au numéro 1 avec probabilité 1. D'un sommet de numéro 1, on passe aux numéros 0 et 2 avec probabilités $1/3$ et $2/3$. D'un sommet de numéro 2, on passe aux numéros 1 et 3 avec probabilités $2/3$ et $1/3$. Enfin, le sommet de numéro 3 est absorbant : on y reste avec probabilité 1.

Ces probabilités sont les mêmes pour tous les sommets d'une même classe. Elles déterminent donc l'évolution des probabilités de X_n , même si certains numéros ne peuvent pas être occupés au rang considéré. On utilise les probabilités totales en ne conditionnant que par les événements $[X_n = j]$ de probabilité positive ; les termes correspondant aux autres numéros valent zéro. Il vient

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3}P(X_n = 1),$$

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) + \frac{2}{3}P(X_n = 2),$$

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{2}{3}P(X_n = 1),$$

$$P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}P(X_n = 2) + P(X_n = 3).$$

Avec les vecteurs-colonnes de l'énoncé, cela s'écrit $U_{n+1} = MU_n$, où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve exactement la matrice de la partie I. Chaque colonne contient les probabilités de destination depuis le numéro correspondant ; ses coefficients sont positifs ou nuls et sa somme vaut 1.

Pour relier cette écriture à la convention des états lignes, posons $V_n = {}^t(U_n)$ et $Q = {}^tM$. Alors $V_{n+1} = V_n Q$, les lignes de Q somment à 1, et Q_{ij} est la probabilité de passer du numéro i au numéro j , les indices étant ici 0, 1, 2, 3. La transposition explique la convention colonne conservée dans cette annale.

- c) Une récurrence à partir de $U_{n+1} = MU_n$ donne $U_n = M^n U_0$ pour tout $n \geq 0$. Pour $n \geq 1$, on peut donc utiliser la représentation de la partie I :

$$U_n = a_n M U_0 + b_n M^2 U_0 + c_n M^3 U_0.$$

Multiplier une matrice par U_0 extrait sa première colonne. D'après les matrices déjà calculées,

$$MU_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{9} \\ 0 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$U_n = \begin{pmatrix} b_n/3 \\ a_n + 7c_n/9 \\ 2b_n/3 \\ 2c_n/9 \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

Ce vecteur donne la loi demandée : ses quatre composantes sont les probabilités des valeurs 0, 1, 2, 3. Leur somme est $a_n + b_n + c_n = 1$, et elles sont positives ou nulles puisqu'elles ont été obtenues par les règles probabilistes.

Pour rendre explicite leur dépendance en n , posons $\rho = q^2 = 7/9$. Si $n = 2m$ avec $m \geq 1$, alors $q^n + (-q)^n = 2\rho^m$ et $q^n - (-q)^n = 0$. Les expressions de I.2.e donnent

$$b_{2m} = \frac{9}{7}\rho^m, \quad a_{2m} = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2}\rho^m, \quad c_{2m} = \frac{9}{2} - \frac{81}{14}\rho^m.$$

En substituant et en utilisant $\frac{9}{7}\rho^m = \rho^{m-1}$, on obtient

$$U_{2m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\rho^{m-1} \\ 0 \\ \frac{2}{3}\rho^{m-1} \\ 1 - \rho^{m-1} \end{pmatrix} \quad (m \geq 1).$$

Si $n = 2m + 1$ avec $m \geq 0$, la somme des deux puissances est nulle et leur différence vaut

$2q\rho^m$. Alors $b_{2m+1} = 0$, $a_{2m+1} = -7/2 + (9/2)\rho^m$ et $c_{2m+1} = 9/2 - (9/2)\rho^m$. Ainsi,

$$U_{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^m \\ 0 \\ 1 - \rho^m \end{pmatrix} \quad (m \geq 0).$$

La valeur $n = 0$ est celle de a) ; la formule des rangs pairs ci-dessus commence au rang 2 et ne doit pas lui être appliquée.

2. Loi de la variable aléatoire T .

Question adaptée au programme actuel : la notation des événements de première atteinte est précisée ; le caractère fini de cette atteinte avec probabilité 1 sera établi en c), sans le supposer avant cette question.

- a) Tant que le point n'a pas atteint le sommet absorbant, chaque déplacement se fait le long d'une arête et change d'une unité la distance au sommet initial. La parité de cette distance change donc à chaque déplacement. Partant de la distance 0, le point ne peut atteindre pour la première fois la distance 3 qu'à un instant impair. Il faut en outre parcourir au moins trois arêtes, puisque le sommet cible est opposé au sommet initial. Ainsi, les seules valeurs possibles pour une première atteinte sont 3, 5, 7, ...

Pour avoir $T = 3$, il faut passer successivement par les numéros 0, 1, 2, 3. Les probabilités de ces trois transitions sont 1, $2/3$, $1/3$. Par les probabilités composées,

$$P(T = 3) = 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

- b) Méthode 1 — Calculer la probabilité du dernier déplacement.

Si $T = 2n + 1$, le point n'est pas au numéro 3 à l'instant $2n$; le seul numéro depuis lequel il peut entrer en 3 par une arête est 2. Réciproquement, si $X_{2n} = 2$ et $X_{2n+1} = 3$, le point

n'avait pas encore atteint 3, car il y serait resté définitivement. Les deux événements sont donc égaux.

Pour $n \geq 1$, la question 1.c donne $P(X_{2n} = 2) = \frac{2}{3}\rho^{n-1} > 0$. Le conditionnement est donc défini, et la probabilité de la transition de 2 vers 3 vaut $1/3$. On obtient

$$P(T = 2n + 1) = \frac{1}{3}P(X_{2n} = 2) = \frac{2}{9}\rho^{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Pour $n = 0$, l'événement $[T = 1]$ est impossible ; la formule précédente ne s'applique pas à ce rang.

Méthode 2 — Soustraire deux probabilités d'atteinte.

L'état 3 étant absorbant, $P(T \leq k) = P(X_k = 3)$, où le membre de gauche désigne provisoirement la probabilité d'une première atteinte au plus tard à l'instant k . Il n'y a pas de première atteinte à un instant pair. Pour $n \geq 1$, les formules de 1.c, valables aussi au rang impair 1 , donnent donc

$$P(T = 2n + 1) = P(X_{2n+1} = 3) - P(X_{2n-1} = 3) = (1 - \rho^n) - (1 - \rho^{n-1}).$$

Cela vaut $(1 - \rho)\rho^{n-1} = \frac{2}{9}\rho^{n-1}$, ce qui retrouve la loi. La première méthode isole la transition décisive ; la seconde utilise directement les probabilités cumulées fournies par les puissances de la matrice.

- c) Les événements de première atteinte sont deux à deux disjoints. Comme $0 < \rho = 7/9 < 1$, la série géométrique converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n + 1) = \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{n-1} = \frac{2/9}{1 - 7/9} = 1.$$

La première atteinte a donc lieu en temps fini avec probabilité 1. La famille calculée est bien la loi d'une variable aléatoire réelle T . On peut lui donner une valeur arbitraire sur

l'éventuel événement de probabilité nulle où il n'y aurait pas d'atteinte; cela ne change ni sa loi ni son espérance.

d) Méthode 1 — Sommer directement les moments de la loi.

La variable T est positive. L'existence d'une espérance finie équivaut ici à la convergence de la série de terme général $(2n + 1)\frac{2}{9}\rho^{n-1}$. Les deux séries

$$\sum_{n \geq 1} \rho^{n-1}$$

et

$$\sum_{n \geq 1} n\rho^{n-1}$$

convergent pour $0 < \rho < 1$, avec pour sommes $1/(1 - \rho)$ et $1/(1 - \rho)^2$. Leurs termes étant positifs, elles justifient la convergence absolue requise et le calcul

$$E(T) = \frac{2}{9} \left(2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\rho^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{n-1} \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{2}{(1 - \rho)^2} + \frac{1}{1 - \rho} \right).$$

Puisque $1 - \rho = 2/9$, on conclut

$$E(T) = \frac{2}{9} \left(\frac{81}{2} + \frac{9}{2} \right) = 10.$$

Méthode 2 — Reconnaître une variable géométrique transformée.

Définissons $G = (T - 1)/2$. La loi de b) donne, pour tout $n \geq 1$,

$$P(G = n) = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9} \right)^{n-1}.$$

La variable G suit donc la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $2/9$. Son espérance existe et vaut $E(G) = 1/(2/9) = 9/2$. L'égalité $T = 2G + 1$ donne, par linéarité,

$$E(T) = 2E(G) + 1 = 10.$$

La première méthode calcule le moment à partir des séries usuelles ; la seconde reconnaît une loi classique et tient compte du décalage et du changement d'échelle. Le temps moyen d'atteinte du sommet opposé est donc de dix déplacements.

Relevé des adaptations

- Préambule de II : le numéro d'un sommet est explicité comme sa distance au sommet initial, pour distinguer les huit sommets des quatre valeurs possibles de X_n ; la géométrie et les règles du mouvement sont conservées.
- Préambule de II et II.2.a–d : précision provisoire de la notation $[T = k]$ avant la preuve d'atteinte en temps fini avec probabilité 1 ; aucune première atteinte n'est supposée certaine sans la démonstration de II.2.c.
- Figure de II : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les positions graphiques mesurées. Les huit numéros et les douze arêtes, dont les trois arêtes cachées en pointillés, sont conservés ; le même schéma est intégré au corrigé. Les coordonnées du dessin ne constituent pas des données métriques du problème.