



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1993

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite de jets indépendants d'un dé équilibré. Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse ; dans la partie II, on étudie l'obtention de r as consécutifs, où r est un entier donné supérieur ou égal à 2.

Partie I

On se propose d'obtenir la limite d'une suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant, pour tout entier $n \geq r$, la relation

$$u_n + \frac{1}{6}u_{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 u_{n-2} + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^{r-1} u_{n-r+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^r. \quad (1)$$

1. On suppose dans cette question que $r = 2$. Exprimer u_n en fonction de n et de u_1 , puis déterminer la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On étudie les suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant (1).
 - a) Déterminer une suite constante $c = (c_n)$ vérifiant (1).
 - b) Établir que u vérifie (1) si et seulement si la suite $v = u - c$ vérifie, pour tout entier $n \geq r$,

$$v_n + \frac{1}{6}v_{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 v_{n-2} + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^{r-1} v_{n-r+1} = 0. \quad (2)$$

- c) Étant donnée une suite $v = (v_n)_{n \geq 1}$ vérifiant (2), on pose

$$M = \max_{1 \leq j \leq r-1} |3^j v_j| = \max(|3v_1|, \dots, |3^{r-1}v_{r-1}|).$$

Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, $|3^n v_n| \leq M$, et en déduire la limite de $(v_n)_{n \geq 1}$.

- d) En déduire la limite d'une suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant (1).

Partie II

On étudie la réalisation de suites de r as consécutifs au cours des jets du dé décrits dans le préambule. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par S_n l'événement « obtenir un as au n -ième jet ».

1. Probabilité d'obtenir au moins une suite de r as.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement

$$E_n = S_{rn-(r-1)} \cap \dots \cap S_{rn-1} \cap S_{rn},$$

c'est-à-dire « obtenir un as aux jets de numéros $rn - (r - 1), \dots, rn - 1, rn$ ».

a) Déterminer les probabilités des événements

$$\bigcap_{k=1}^n \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_n}, \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k}.$$

Il s'agit de l'intersection des complémentaires de $E_1, \dots, E_n$, puis de l'intersection des complémentaires de tous les E_k .

b) En déduire que l'obtention de r as consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1.

2. Probabilité d'obtenir une suite de r as s'achevant au n -ième jet.

Pour tout entier $n \geq r$, on désigne par U_n l'événement « obtenir une suite de r as consécutifs s'achevant au n -ième jet, c'est-à-dire des as aux jets de numéros $n - (r - 1), \dots, n - 1, n$, dont aucun n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r as consécutifs ».

Par exemple, pour $r = 3$, en notant S un succès et E un échec, la suite

$$\underbrace{SSS}_3 \underbrace{SSS}_6 SEE \underbrace{SSS}_{12} SSEESE \underbrace{SSS}_{20} SEE \dots$$

mène à la réalisation de $U_3, U_6, U_{12}, U_{20}, \dots$. Les nombres indiqués sous les groupes sont les numéros des jets auxquels ces groupes s'achèvent.

On note $u_n = P(U_n)$ et l'on pose par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = \dots = u_{r-1} = 0$.

- a) Montrer que la réalisation de $S_{n-(r-1)} \cap \dots \cap S_{n-1} \cap S_n$ implique la réalisation d'un et d'un seul des événements $U_{n-(r-1)}, \dots, U_{n-1}, U_n$, pour $n \geq r$. En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifie (1).

Quelle est la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

- b) En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité qu'une suite de deux as consécutifs, comptabilisée selon la convention précédente, s'achève au n -ième jet.

3. Étude de la première suite de r as consécutifs.

On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, s'achève une suite de r as consécutifs. Dans l'exemple de la question 2, X vaut 3.

On pose par convention $P(X = 0) = P(X = 1) = \dots = P(X = r - 1) = 0$.

- a) Vérifier, à l'aide de la question 1, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N P(X = n) = 1.$$

- b) Pour tout réel $x \in [0, 1[$, on pose

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que

$$U(x) = 1 + \frac{(x/6)^r}{1 - (x/6)^r} \frac{1 - x/6}{1 - x}.$$

- c) Pour tout entier $n \geq r$, montrer que, si U_n est réalisé, une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'un des n premiers jets. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n P(X = k) u_{n-k}. \quad (3)$$

- d) À deux séries convergentes à termes positifs ou nuls

$$\sum a_n$$

et

$$\sum b_n,$$

on associe la série de terme général

$$c_n = a_0 b_n + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0.$$

Vérifier que, pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n c_k \leq \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

En déduire la convergence et la somme de

$$\sum c_n.$$

e) Pour tout réel $x \in [0, 1]$, on pose

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation entre $U(x)$ et $G(x)$ pour $x \in [0, 1]$. On pourra multiplier (3) par x^n et sommer les égalités pour $n \geq 1$.

f) En déduire l'expression de $G(x)$ pour $0 \leq x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en $x = 1$.

4. Temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs.

a) Déterminer l'espérance de X , en justifiant son existence. Pour cela, on pourra établir, pour $0 \leq x < 1$,

$$\frac{1 - G(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)(1 + x + \dots + x^{n-1}),$$

puis encadrer les sommes partielles de

$$\sum nP(X = n)$$

à l'aide de cette identité et faire tendre x vers 1 par valeurs inférieures. On ne suppose aucune règle de dérivation terme à terme d'une série.

b) On effectue un jet du dé à chaque seconde. Donner dans un tableau, en secondes, minutes, heures, jours et années, le temps moyen d'attente de la première suite de r as consécutifs pour $r = 5$, $r = 10$ et $r = 25$.

Pour les conversions, on prend un jour égal à 24 heures et une année égale à 365 jours. À titre de comparaison, on utilisera la valeur de 15 milliards d'années donnée pour l'âge

de l'Univers dans le sujet.